ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ & ΕΠΑΛ (Β΄)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ (20/05/2016)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. σχολ.σελ.150 - 151

Α2. σχολ.σελ.87

Α3. σχολ.σελ.14

Α4. i) Σ ii) Λ iii) Σ iv) Σ v) Λ

ΘΕΜΑ Β

$f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+6x-1,\quad x\in\mathbb{R}$

Β1. $f'(x)=x^2-5x+6$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2 \quad ή \quad x=3$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x^2-5x+6>0 \Leftrightarrow x<2 \quad ή \quad x>3$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x^2-5x+6<0 \Leftrightarrow x\in(2,3)$

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
f΄(x)	+	0	−	0	+
f(x)	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty,2)$ και $(3,+\infty)$ γνησίως φθίνουσα φθίνουσα στο (2,3), παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο Β(2,f(2)) δηλ. $B\left(2,\frac{11}{3}\right)$ και τοπικό ελάχιστο στο Γ $(3,f(3))$ δηλ. $\Gamma\left(3,\frac{7}{2}\right)$.

Β2. Έστω $\varepsilon: y=\lambda x+\beta$ η εφαπτομένη στο Α $(0,f(0))$ δηλ. Α(0,-1)

Είναι $\lambda=f'(0)=0^2-5\cdot 0+6=6$

άρα $\varepsilon: y=6x+\beta$ και $A(0,-1)\in\varepsilon \Rightarrow -1=6\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=-1$

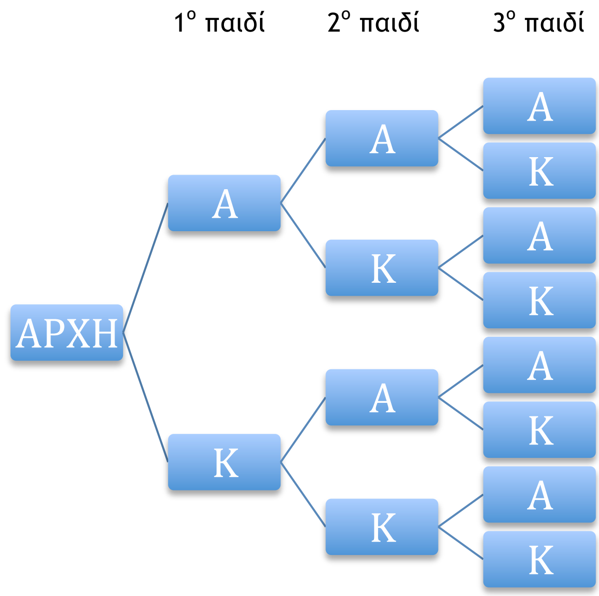
οπότε ε: $y=6x-1$

Β3.

$$\lim_{x\to-1}\frac{f'(x)-12}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-5x+6-12}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-5x-6}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x-6)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}=-1-6=-7$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.



$$\Omega = \{AAA, AAK, AKA, AKK, KAA, KAK, KKA, KKK\} \quad N(\Omega) = 8$$

Γ2. Α: ''το πρώτο παιδί είναι κορίτσι''

$$A = \{KAA, KAK, KKA, KKK\}, \quad N(A) = 4$$

Β: ''ο αριθμός των κοριτσιών υπερβαίνει τον αριθμό των αγοριών''

$$B = \{AKK, KAK, KKA, KKK\}, \quad N(B) = 4$$

Γ: ''τα 2 πρώτα παιδιά είναι του ίδιου φύλου''

$$\Gamma = \{AAA, AAK, KKA, KKK\}, \ N(\Gamma) = 4$$

Γ3. Έχουμε: $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

α) $\Delta = A \cap B = \{KAK, KKA, KKK\}$ με $N(\Delta) = 3$

άρα $P(\Delta) = \dfrac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \dfrac{3}{8}$

$E = A \cup B = \{KAA, AKK, KAK, KKA, KKK\}$ με $N(E) = 5$

άρα $P(E) = \dfrac{N(E)}{N(\Omega)} = \dfrac{5}{8}$

$Z = \Gamma - E = \{AAA, AAK\}$ με $N(Z) = 2$

άρα $P(Z) = \dfrac{N(Z)}{N(\Omega)} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

β) $P(H)=P\left[(A\cup B)'\right]=1-P(A\cup B)=1-P(E)=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$

$$P(\Theta)=P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P(A-B)+P(B-A)=$$
$$=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$$
$$=\frac{4}{8}+\frac{4}{8}-2\cdot\frac{3}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω $[8,8+c),[8+c,8+2c),[8+2c,8+3c),[8+3c,8+4c)$ οι 4 κλάσεις. Αφού η κεντρική τιμή της $2^{η}$ κλάσης είναι $x_2=14$, τότε:

$$\frac{8+c+8+2c}{2}=14\Leftrightarrow\frac{16+3c}{2}=14\Leftrightarrow 16+3c=28\Leftrightarrow 3c=12\Leftrightarrow c=4$$

Δ2. Αφού c=4, οι κλάσεις είναι:

$[8,12),[12,16),[16,20),[20,24)$ με κεντρικές τιμές: $x_1=10,x_2=14,x_3=18,x_4=22$

Έχουμε:

$$\bar{x}=14\Leftrightarrow\frac{x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+x_4v_4}{v}=14$$
$$\Leftrightarrow\frac{10\cdot20+14\cdot15+18\cdot10+22\cdot v_4}{20+15+10+v_4}=14$$
$$\Leftrightarrow 200+210+180+22v_4=14\cdot(45+v_4)$$
$$\Leftrightarrow 590+22v_4=630+14v_4$$
$$\Leftrightarrow 8v_4=40$$
$$\Leftrightarrow v_4=5$$

οπότε ο πίνακας γίνεται:

χρόνος (σε λεπτά)	κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i
$[8,12)$	10	20
$[12,16)$	14	15
$[16,20)$	18	10
$[20,24)$	22	5
ΣΥΝΟΛΟ	-	50

Δ3. Τουλάχιστον 9 λεπτά χρειάστηκαν:

$$\frac{3}{4}\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=\frac{3}{4}\cdot 20+15+5+15+10+5=45 \text{ υπολογιστές}$$

διότι το διάστημα $[9,12)$ είναι τα $\frac{3}{4}$ του $[8,12)$ και, εφόσον οι παρατηρήσεις σε αυτό είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες, τότε στο διάστημα $[9,12)$ θα βρίσκονται τα $\frac{3}{4}$ των παρατηρήσεων του $[8,12)$ δηλαδή τα $\frac{3}{4}$ του ν_1.

Δ4. $s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\cdot\nu_i=\frac{1}{50}\left[\left(x_1-\bar{x}\right)^2\cdot\nu_1+\left(x_2-\bar{x}\right)^2\cdot\nu_2+\left(x_3-\bar{x}\right)^2\cdot\nu_3+\left(x_4-\bar{x}\right)^2\cdot\nu_4\right]$

$=\frac{1}{50}\left[(10-14)^2\cdot 20+(14-14)^2\cdot 15+(18-14)^2\cdot 10+(22-14)^2\cdot 5\right]=$

$=\frac{1}{50}\cdot\left(16\cdot 20+0+16\cdot 10+64\cdot 5\right)=$

$=\frac{1}{50}\cdot\left(320+160+320\right)=\frac{800}{50}=16$

άρα s=4

και $CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}>\frac{1}{10}$ διότι $\frac{2}{7}=\frac{20}{70}>\frac{7}{70}=\frac{1}{10}$

οπότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

Δ5. $y_i=\frac{80}{100}x_i=0,8x_i \qquad i=1,\dots,\nu$

οπότε $\bar{y}=0,8\bar{x}$ και $s_y=0,8s_x$ (από εφαρμογή σχ. βιβλίου)

άρα $CV_y=\frac{s_y}{\bar{y}}=\frac{\cancel{0,8}s_x}{\cancel{0,8}\bar{x}}=\frac{s_x}{\bar{x}}=CV_x$

Επομένως, δεν άλλαξε η ομοιογένεια του δείγματος.