ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ (06/06/2023)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό σελ.111

Α2. Σχολικό σελ.104

Α3. Σχολικό σελ.128

Α4. **α)** Λάθος

β) Λάθος

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

$D_g = R$ (αφού $e^x \neq 0$) για κάθε $x \in R$

$D_h = (0,+\infty)$

Β1. $D_f = D_{goh} = \{x \in D_R \ / \ h(x) \in D_g\}$

- $x \in D_h \Rightarrow x > 0$
- $h(x) \in D_g \Rightarrow h(x) \in R$

Άρα $D_f = (0,+\infty)$

$$f(x) = g(h(x)) = \frac{4 - e^{2\ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - e^{\ln x^2}}{x} = \frac{4 - x^2}{x}$$

Β2. i) $f(x) = \dfrac{4}{x} - x$ άρα $f'(x) = \dfrac{-4}{x^2} - 1 = \dfrac{-4 - x^2}{x^2} = -\dfrac{4 + x^2}{x^2}$, $x > 0$

Είναι f΄(x) < 0 για κάθε $x \in D_f = (0,+\infty)$ και *f* συνεχής ως ρητή στο $(0,+\infty)$, άρα η *f* είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

ii) Ισχύει $e < \pi \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(e) > f(\pi) \Rightarrow \dfrac{4 - e^2}{e} > \dfrac{4 - \pi^2}{\pi} \Rightarrow (4 - e^2)\pi > e(4 - \pi^2) \Rightarrow \dfrac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \dfrac{\pi}{e}$

(διότι $4 - e^2 < 0$)

Β3. *f* συνεχής ως ρητή στο $(0,+\infty)$

Πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη η x = 0.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{4}{x} - x\right) = +\infty, \text{ διότι } \lim_{x\to 0^+} x = 0 \text{ και } \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$$

Άρα η x = 0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f (για $x \to 0^+$)

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x^2}-1\right) = -1,$ διότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0$ (αφού $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\right) = +\infty$)

  $\lambda = -1$

- $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x} - x + x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x} = 0$

  $\beta = 0$

Άρα η ευθεία y = λx + β $\Rightarrow y = -x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Β4. $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)}\right| \leq \frac{1}{|f(x)|}$

Άρα $-\left|\frac{1}{f(x)}\right| \leq \frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)} \leq \left|\frac{1}{f(x)}\right|$ (1)

Όμως, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{4-x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{-x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{x}\right) = 0$

Άρα $\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{f(x)}\right| = 0$ και $\lim_{x\to+\infty}\left(-\left|\frac{1}{f(x)}\right|\right) = 0$

Έτσι, από τη σχέση (1) και το κριτήριο παρεμβολής, έχουμε : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)} = 0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\int_2^3 x\cdot f(x)\cdot d(x) = 1$ (1)

Για x > 1 : $f(x) = \frac{1}{x} + a$, συνεχής (ως ρητή)

$x\cdot f(x) = 1 + ax$

Τότε (1) $\Rightarrow \int_2^3 (1+ax) = 1 \Leftrightarrow \left[x + a\frac{x^2}{x}\right]_2^3 = 1 \Rightarrow 3 + a\frac{9}{2} - \left(2 + a\frac{4}{2}\right) = 1 \Rightarrow 1 + \frac{5a}{2} = 1 \Rightarrow a = 0$

Γ2. Για α = 0 : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3, & x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$

Στο $x_0 = 1$: $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\frac{1-x}{x}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-(x-1)}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-1}{x} = -1$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-3x+3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-2)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}(x-2) =$$
$$= 1-2 = -1$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και f΄(1) = -1

Έτσι ορίζεται η εφαπτομένη (ε) της C_f στο x_0=1 και η εξίσωσή της είναι :

$$\varepsilon: \quad y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-1 = -1(x-1) \Leftrightarrow y = -x+2$$

$\lambda_\varepsilon = -1 \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = -1,$ όπου ω η γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον x΄x.

Άρα $\omega = 135^o$ (αφού εφ45^o = 1 και ω∈[0,180°))

Γ3.

- Για x < 1 : $f(x) = x^2-3x+3$ συνεχής ως πολ/κη

  $f'(x) = 2x-3 < 0$ για κάθε x<1 άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty,1)$

- Για x > 1 : $f(x) = \dfrac{1}{x}$ συνεχής ως ρητή

  $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} < 0$ για κάθε x >1 άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο $(1,+\infty)$

- Στο $x_0 = 1$: από το Γ2 έχουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη $(f'(1) = -1)$ οπότε είναι και συνεχής.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R, οπότε είναι και 1 - 1.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο R, οπότε το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(D_f) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right)$$

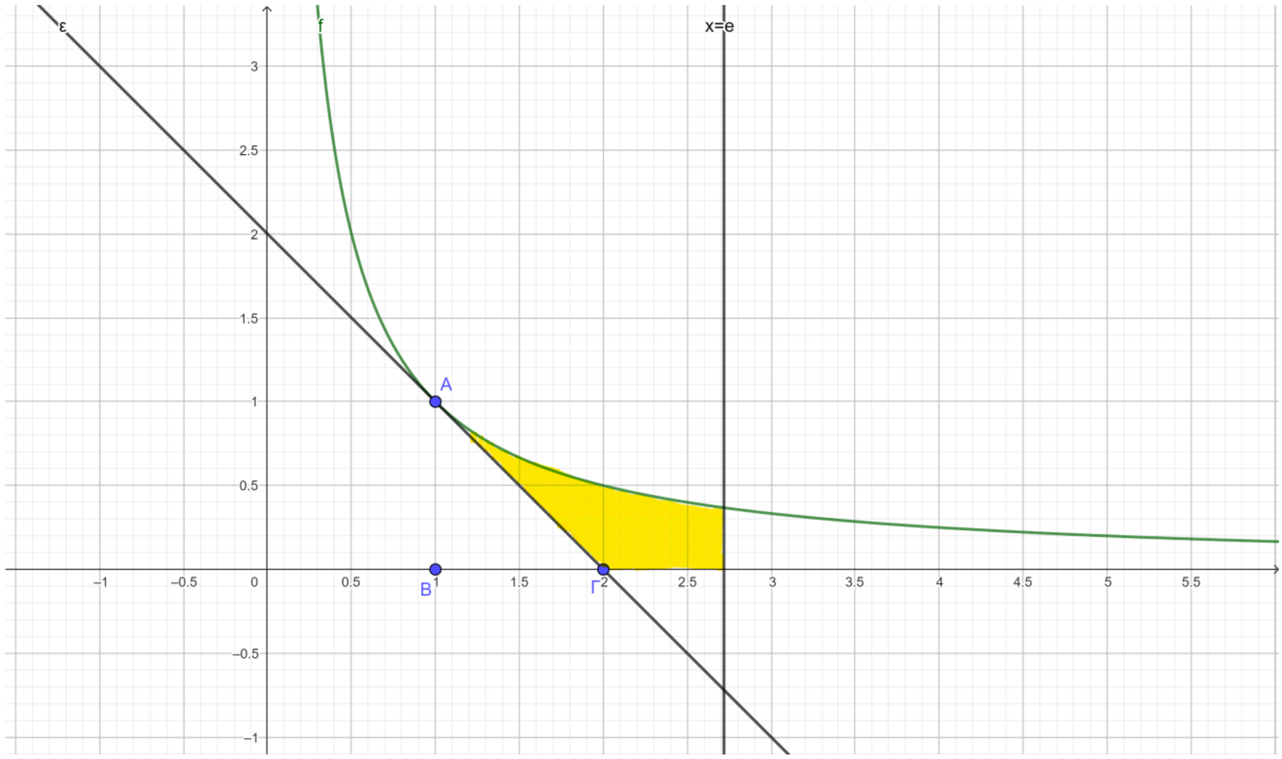
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-3x+3\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2\right) = +\infty$

Άρα $f(D_f) = (0,+\infty)$

Γ4. $\varepsilon: \ y = -x+2$ η εφαπτομένη της C_f στο Α(1,1)

Για $y = 0$: 0 = -x + 2 ⇔ x = 2, δηλ. τέμνει τον x΄x στο σημείο Γ(2,0)



$$E(\Omega)=\int_1^e f(x)dx-(\mathrm{AB\Gamma})=\int_1^e \frac{1}{x}dx-\frac{1\cdot 1}{2}=\left[\ln x\right]_1^e-\frac{1}{2}=\ln e-\ln 1-\frac{1}{2}=1-0-\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{2} \text{ τετρ.μονάδες}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2x}{x-1}=l\in R \quad (1)$

Θέτουμε $\dfrac{f(x)-2x}{x-1}=g(x),\ \ x\in(0,1)\cup(1,2)$

$$f(x)-2x=g(x)(x-1)$$

Από (1), έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=l\in R$ οπότε $\lim\limits_{x\to 1}\left[g(x)(x-1)\right]=l\cdot 0=0$

Άρα πρέπει $\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)-2x\right]=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 1}\left[\ln(2-x)-\frac{1}{x}+\kappa-2x\right]=0\Rightarrow\ln 1-\frac{1}{1}+\kappa-2=0\Rightarrow\kappa=3$$

Δ2. $f(x)=\ln(2-x)-\dfrac{1}{x}+3,\ x\in(0,2)$

- f συνεχής στο (0,2) ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων {η $\dfrac{1}{x}$ είναι συνεχής ως ρητή και η ln(2-x) ως σύνθεση πολυωνυμικής με λογαριθμική}

- $f'(x)=\frac{1}{2-x}(2-x)'-\left(\frac{-1}{x^2}\right)+0=\frac{-1}{2-x}+\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2+2-x}{x^2(2-x)}$

  $f'(x)=0\Leftrightarrow -x^2-x+2=0\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-2$

  $f'(x)>0\overset{0<x<2}{\Leftrightarrow}-x^2+2-x>0\overset{0<x<2}{\Leftrightarrow}0<x<1$

x	0	1	2
f΄(x)	+	0	–
f(x)	↗		↘

ΜΕΓ.
f(1)=2

- $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(2-x)+3\right]=\ln 2+3$
- $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=-\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 2^-}\left[\ln(2-x)\right]\overset{(*)}{=}\lim\limits_{u\to 0^+}(\ln u)=-\infty$

(*) θέτουμε u=2-x

$\lim\limits_{x\to 2^-}u=\lim\limits_{x\to 2^-}(2-x)=0$

Άρα $f\left((0,1)\right)=(-\infty,2)=\Delta_1$ και $f\left((1,2)\right)=(-\infty,2)=\Delta_2$

Αφού η f είναι συνεχής στο (0,2) και $0\in\Delta_1$ έχουμε ότι η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα x_1 στο (0,1) η οποία όμως θα είναι μοναδική αφού η f είναι γν. μονότονη στο (0,1). Ομοίως στο (1,2) θα υπάρχει ακριβώς μία ρίζα x_2.

Άρα έχουμε ακριβώς 2 ρίζες x_1, x_2 της f με $x_1 < 1 < x_2$.

Όμως $f\left(\frac{1}{3}\right)=\ln\left(2-\frac{1}{3}\right)-3+3=\ln\frac{5}{3}>0$, αφού $\frac{5}{3}>1$.

Άρα η ρίζα $x_1\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$ (αφού $f\left(\frac{1}{3}\right)>f(x_1)$ και f γν.αύξουσα στο $\left(x_1,\frac{1}{3}\right)\subset(0,1)$)

Δ3. Η f είναι συνεχής στο $\left[x_1,\frac{1}{3}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(x_1,\frac{1}{3}\right)$. Άρα (Θ.Μ.Τ.) υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(x_1,\frac{1}{3}\right)\subseteq(0,1)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi)=\frac{f\left(\frac{1}{3}\right)-f(x_1)}{\frac{1}{3}-x_1}=\frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1-3x_1}{3}}=\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

Όμως η f' είναι γν. αύξουσα, αφού είναι συνεχής (ως ρητή) και

$f''(x)=\frac{-1}{(2-x)^2}-\frac{2}{x^3}<0$ για $x\in(0,2)$.

Άρα το παραπάνω ξ είναι μοναδικό.

Δ4. i. $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, $x \in (0,2)$

Άρα $F'(x) = G'(x) \Rightarrow F(x) = G(x) + c$

για $x = x_1$: $F(x_1) = G(x_1) + c \Rightarrow 0 = G(x_1) + c$

για $x = x_2$: $F(x_2) = G(x_2) + c \Rightarrow F(x_2) = c$

Άρα $G(x_1) + F(x_2) = 0$

ii. Έστω $h(x) = x_1 \cdot F(x) + x_2 \cdot G(x) - x_1 - x_2 + 2x$, $x \in [x_1, x_2]$ όπου x_1, x_2 από Δ_2

- Η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$
- $h(x_1) = x_1 \cdot F(x_1) + x_2 G(x_1) - x_1 - x_2 + 2x_1 = x_2 G(x_1) + x_1 - x_2$
- $h(x_2) = x_1 \cdot F(x_2) + x_2 G(x_2) - x_1 - x_2 + 2x_2 = x_1 F(x_2) + x_2 - x_1 \overset{(i)}{=} - x_1 G(x_1) + x_2 - x_1$

Η f είναι γν. αύξουσα στο [x1,1] άρα: $x_1 < x < 1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x) < f(1) \Rightarrow 0 < f(x) < 2$

Η f είναι γν. φθίνουσα στο [1,x2] άρα: $1 \le x < x_2 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(1) \ge f(x) > f(x_2) \Rightarrow 2 \ge f(x) > 0$

Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$.

Οπότε $G'(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$

Άρα $G \uparrow$ στο $[x_1, x_2]$ οπότε $x_1 < x_2 \Rightarrow G(x_1) < G(x_2) \overset{G(x_2)=0}{\Rightarrow} G(x_1) < 0$

Έτσι έχουμε : $x_2 G(x_1) < 0$ και $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 < 0$ οπότε $h(x_1) < 0$

Επίσης, $G(x_1) < 0 \Rightarrow -G(x_1) > 0 \Rightarrow -x_1 G(x_1) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$ άρα $h(x_2) > 0$

Οπότε $h(x_1) \cdot h(x_2) < 0$

Άρα (Θ. Bolzano) η $h(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (x_1, x_2).

Όμως, $h'(x) = x_1 \cdot F'(x) + x_2 \cdot G'(x) + 2 = x_1 \cdot f(x) + x_2 \cdot f(x) + 2 > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$

διότι $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ και $f(x) > 0$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο (x_1, x_2).

Συνεπώς, η $h(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο (x_1, x_2).