ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ (17/06/2020)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχ. βιβλίο σελ. 76

Α2. Σχ. βιβλίο σελ. 104

Α3. α) Ψ, β) Σχ. βιβλίο σελ. 136

Α4. α) Λάθος (Σχολ. σελ.61)

β) Σωστό (Σχολ. σελ.25)

γ) Σωστό (Σχολ. σελ.19)

γ) Σωστό (Σχολ. σελ.76)

γ) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_f = (1,+\infty), \quad D_g = \mathbb{R}$

$$D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in D_g \quad \kappa\alpha\iota \quad g(x) \in D_f\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \ \kappa\alpha\iota \ \ e^x > 1\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \ \kappa\alpha\iota \ \ x > 0\} = (0,+\infty)$$

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)+2}{g(x)-1} = \frac{e^x+2}{e^x-1}$$

Β2. Έστω $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ τέτοια ώστε $(f\circ g)(x_1) = (f\circ g)(x_2)$

$$\Rightarrow \frac{e^{x_1}+2}{e^{x_1}-1} = \frac{e^{x_2}+2}{e^{x_2}-1} \Rightarrow \left(e^{x_1}+2\right)\left(e^{x_2}-1\right) = \left(e^{x_1}-1\right)\left(e^{x_2}+2\right)$$
$$\Rightarrow e^{x_1}\cdot e^{x_2} - e^{x_1} + 2e^{x_2} - 2 = e^{x_2}\cdot e^{x_1} - e^{x_2} + 2e^{x_1} - 2$$
$$\Rightarrow -e^{x_1} + 2e^{x_2} = -e^{x_2} + 2e^{x_1} \Rightarrow 3e^{x_1} = 3e^{x_2}$$
$$\Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η $f\circ g$ είναι 1 – 1.

$$(f\circ g)(x)=y\Rightarrow \frac{e^x+2}{e^x-1}=y\Rightarrow e^x+2=y\cdot e^x-y\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x(1-y)=-y-2\overset{y\neq 1}{\Rightarrow} e^x=-\frac{y+2}{1-y}\Rightarrow e^x=\frac{y+2}{y-1}$$

$$\Rightarrow x=\ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)$$

$$\pi\rho\acute{\varepsilon}\pi\varepsilon\iota\ \frac{y+2}{y-1}>0\Rightarrow y>1\ \acute{\eta}\ y<-2$$

$$\kappa\alpha\iota\ x>0\Rightarrow \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)>0\Rightarrow \frac{y+2}{y-1}>1\Rightarrow \frac{y+2}{y-1}-1>0\Rightarrow \frac{y+2-(y-1)}{y-1}>0\Rightarrow \frac{3}{y-1}>0\Rightarrow y>1$$

Άρα $D_{(f\circ g)^{-1}}=(1,+\infty)$

$$(f\circ g)^{-1}(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$$

B3. Η φ είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων (ρητής με λογαριθμική)

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με :

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)'=\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{1\cdot(x-1)-(x+2)\cdot 1}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x-1-x-2}{(x-1)(x+2)}=\frac{-3}{(x-1)(x+2)}$$

Ισχύει $\varphi'(x)<0$ για κάθε x>1.

Άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.

B4.

$$\lim_{x\to 1^+}\varphi(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right)=L$$

$$\Theta\acute{\varepsilon}\tau o\upsilon\mu\varepsilon\ \frac{x+2}{x-1}=u.\ \mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \lim_{x\to 1^+}u=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+2}{x-1}=+\infty$$

$$\mathrm{T}\acute{o}\tau\varepsilon\ L=\lim_{u\to+\infty}(\ln u)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right)=l$$

$$\Theta\acute{\varepsilon}\tau o\upsilon\mu\varepsilon\ \frac{x+2}{x-1}=u.\ \mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \lim_{x\to+\infty}u=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1=\lim_{x\to+\infty}1=1$$

$$\acute{A}\rho\alpha\ \ l=\lim_{u\to 1}(\ln u)=\ln 1=0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η f είναι συνεχής πρέπει :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \mathrm{f}(0)$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{1-x} - \ln\lambda\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\eta\mu x + \lambda\sigma\upsilon\nu x\right)$$
$$\Leftrightarrow 1 - \ln\lambda = \lambda$$
$$\Leftrightarrow \lambda + \ln\lambda - 1 = 0$$

Έστω $g(x) = x + \ln x - 1,\ x > 0$

Η g έχει προφανή ρίζα στο x = 1, αφού : $g(1) = 1 + \ln 1 - 1 = 0$ και είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα λογαριθμικής και πολ/κης.

$g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα, οπότε x = 1 μοναδική ρίζα της g.

Έτσι λ = 1.

Γ2. Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1-1+x}{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{x}{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1-x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}\right) = 1 + 0 = 1$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, με $f'(0) = 1$ και είναι $\lambda_{\varepsilon\varphi} = f'(0) = \varepsilon\varphi\omega = 1$ άρα $\omega = \frac{\pi}{4}$.

Γ3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & x \le 0 \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x < \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$

- για x < 0 η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = -\frac{1}{(1-x)^2}\cdot(1-x)' = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$

  Άρα η f δεν έχει κρίσιμα σημεία για x < 0.

- Για $0 < x < \frac{3\pi}{2}$ η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)' = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x = 2\kappa\pi + x \quad \acute{\eta} \quad \frac{\pi}{2} - x = 2\kappa\pi - x$$

$$-2x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \qquad\qquad \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta$$

$$x = -\kappa\pi + \frac{\pi}{4}$$

Όμως $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$, οπότε $x = \frac{\pi}{4}$ $\acute{\eta}$ $x = \frac{5\pi}{4}$

- Για x = 0 είναι $f'(0) = 1 \neq 0$

Άρα τα κρίσιμα σημεία της f είναι το $x_1 = \frac{\pi}{4}$ και το $x_2 = \frac{5\pi}{4}$

Γ4. Εφαπτομένη της C_f $\sigma\tau o$ $\mathrm{M}(\alpha, f(\alpha))$:

$$\varepsilon : y - f(a) = f'(a)\cdot(x-a)$$

Αφού $\alpha \leq 0$, τότε $f(a) = \frac{1}{1-\alpha}$ $\kappa\alpha\iota$ $f'(a) = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$

Τότε $\varepsilon : y - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}\cdot(x-a)$

Για y = 0 (σημείο τομής με $x'x$) :

$$-\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}\cdot(x-a)$$

$$\Leftrightarrow -1 = \frac{1}{1-\alpha}(x-a)$$

$$\Leftrightarrow -1 + a = x - a \Leftrightarrow x = 2a - 1$$

Δηλαδή $\mathrm{B}(2\alpha(t) - 1, 0)$

$$x(t) = 2a(t) - 1 \qquad (1)$$

Οπότε $x'(t) = 2a'(t) = -2\frac{a(t)}{3}$ (2)

Τη στιγμή t_0 όπου $a(t_0) = -1$ από τη σχέση (2) έχουμε :

$$x'(t_0) = -2\cdot\frac{-1}{3}$$

$$x'(t_0) = \frac{2}{3} \quad \mu o\nu.\mu\acute{\eta}\kappa o\upsilon\varsigma / \chi\rho\acute{o}\nu o\upsilon$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων στο $\mathbb{R}$.

Είναι : $f'(x) = e^x + 2x - e$

$Έχουμε\ \ f'(0) = 1 - e < 0, \quad f'(1) = 2 > 0$

Επειδή f' συνεχής στο $[0,1]$ ως άθροισμα συνεχών τότε, από θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τ.ω. $f'(x_0) = 0$

Επειδή $f''(x) = e^x + 2x - e,\ x \in \mathbb{R}$ οπότε f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα το $x_0 \in (0,1)$ είναι μοναδικό.

Για $x < x_0 \overset{\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0$

Για $x > x_0 \overset{\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, x_0]$ και f γνησίως αύξουσα στο $[x_0 + \infty)$.

Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, έπεται ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 το

$f(x_0) = e^{x_0} + x_0^{\ 2} - ex_0 - 1$

Από (1) $\Rightarrow e^{x_0} + 2x_0 \ - e = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0$

Άρα $f'(x_0) = e - 2x_0 + x_0^{\ 2} - ex_0 - 1 = x_0^{\ 2} - (e+2)x_0 + e - 1$

Δ2. $\lim\limits_{x \to x_0} \left[\dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu\left(\dfrac{1}{x - x_0} \right) \right] =$

$$= \lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{1}{x - x_0} \left[\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} + (x - x_0) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right] \right\}$$

- Για τον υπολογισμό του $\lim\limits_{x \to x_0^+} \left[(x - x_0) \cdot \eta\mu\left(\dfrac{1}{x - x_0} \right) \right]$ θέτουμε $\omega = \dfrac{1}{x - x_0}$

Οπότε $\lim\limits_{x \to x_0^+} \omega = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{1}{x - x_0} = +\infty$

Άρα $\lim\limits_{x \to x_0^+} \left[(x - x_0) \cdot \eta\mu\left(\dfrac{1}{x - x_0} \right) \right] = \lim\limits_{\omega \to +\infty} \dfrac{\eta\mu\omega}{\omega} = 0$, διότι:

$$\left| \frac{\eta\mu\omega}{\omega} \right| \le \frac{1}{\omega} \Leftrightarrow -\frac{1}{\omega} \le \frac{\eta\mu\omega}{\omega} \le \frac{1}{\omega}, \quad \mu\varepsilon \lim_{\omega \to +\infty} \frac{1}{\omega} = 0 \ \ \kappa\alpha\iota \quad \lim_{\omega \to +\infty} \left(-\frac{1}{\omega} \right) = 0$$

οπότε (Κ.Π.) $\lim\limits_{\omega \to +\infty} \dfrac{\eta\mu\omega}{\omega} = 0$

- $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=+\infty,\ \delta\iota\acute{o}\tau\iota \quad \lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=0$

(αφού το x_0 είναι θέση ακρότατου)

και $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0 \quad \gamma\iota\alpha \quad x>x_0$ (αφού $f(x)>f(x_0)$)

- $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{1}{x-x_0}=+\infty$ (διότι $\lim\limits_{x\to x_0^+}(x-x_0)=0$ και $x-x_0>0$)

Άρα για $x>x_0$ έχουμε : $\lim\limits_{x\to x_0^+}\left\{\dfrac{1}{x-x_0}\left[\dfrac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}+(x-x_0)\cdot\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\right]\right\}=+\infty$

Οπότε $\lim\limits_{x\to x_0^+}\left[\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\right]=+\infty$

- Για τον υπολογισμό του $\lim\limits_{x\to x_0^-}\left[(x-x_0)\cdot\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\right]$ θέτουμε $u=\dfrac{1}{x-x_0}$

Οπότε $\lim\limits_{x\to x_0^-}u=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{1}{x-x_0}=-\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to x_0^-}\left[(x-x_0)\cdot\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\right]=\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{\eta\mu u}{u}=0$, διότι:

$\left|\dfrac{\eta\mu\omega}{\omega}\right|\le\dfrac{1}{\omega}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{u}\le\dfrac{\eta\mu u}{u}\le\dfrac{1}{u}, \quad \mu\varepsilon\ \lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{1}{u}=0\ \ \kappa\alpha\iota\quad \lim\limits_{\omega\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{u}\right)=0$

οπότε (Κ.Π.) $\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{\eta\mu u}{u}=0$

- $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=-\infty,\ \delta\iota\acute{o}\tau\iota \quad \lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=0$

(αφού το x_0 είναι θέση ακρότατου)

και $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0 \quad \gamma\iota\alpha \quad x<x_0$ (αφού $f(x)>f(x_0)$)

- $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{1}{x-x_0}=-\infty$ (διότι $\lim\limits_{x\to x_0^+}(x-x_0)=0$ και $x-x_0>0$)

Άρα για $x<x_0$ έχουμε : $\lim\limits_{x\to x_0^-}\left\{\dfrac{1}{x-x_0}\left[\dfrac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}+(x-x_0)\cdot\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\right]\right\}=+\infty$

Οπότε $\lim_{x\to x_0^-}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]=+\infty$

Άρα $\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]=+\infty$

Β΄τρόπος

Ισχύει $\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\geq -1$ για κάθε $x\neq x_0$

Άρα $\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)+\frac{1}{f(x)-f(x_0)}\geq -1+\frac{1}{f(x)-f(x_0)}$ (1)

Όμως $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)-f(x_0)}=+\infty$, διότι $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0$ και $f(x)>f(x_0)\Rightarrow f(x)-f(x_0)>0$

Άρα $\lim_{x\to x_0}\left[-1+\frac{1}{f(x)-f(x_0)}\right]=+\infty$

Έτσι από την (1) έχουμε: $\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]=+\infty$

Δ3.

- Ύπαρξη ρίζας:

Έστω $\varphi(x)=f(x)+x-x_0,\ x\in[x_0,1]$

- Η φ είναι συνεχής στο $[x_0,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $\varphi(x_0)=f(x_0)+x_0-x_0=f(x_0)<0,\ \textit{διότι}\ x_0\in(0,1)$ & η f είναι γνησίως φθίνουσα για $x<x_0$,

οπότε $f(0)>f(x_0)\Rightarrow 0>f(x_0)$

$\varphi(1)=f(1)+1-x_0=0+1-x_0=1-x_0>0$

Άρα $\varphi(x_0)\cdot\varphi(1)<0$

Συνεπώς, από θ. Bolzano έχουμε ότι υπάρχει $\rho\in(x_0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(\rho)=0\Leftrightarrow f(\rho)+\rho=x_0$

- Μοναδικότητα ρίζας :

$\varphi'(x)=f'(x)+1>0$ για κάθε $x\in(x_0,1)$ διότι από το Δ1 $f'(x)>0$ για κάθε $x>x_0$

Άρα η φ ως συνεχής είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,1]$ και συνεπώς το ρ είναι μοναδικό.

Δ4. Εφαρμόζουμε για την f ΘΜΤ στο διάστημα $\left[x_0,\rho\right]$ αφού f συνεχής στο $\left[x_0,\rho\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(x_0,\rho\right)$.

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in \left(x_0,\rho\right)$ τ.ω. $f'(\xi_1)=\dfrac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho-x_0}$ (1)

Από το Δ1, f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Αφού $x_0<\xi_1<\rho$ ισχύει για κάθε $\kappa \in \left(\rho,1\right)$

$$f'(\xi_1)<f'(\kappa)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\frac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho-x_0}<f'(\kappa)\overset{\rho-x_0>0}{\Leftrightarrow} f(\rho)-f(x_0)<f'(\kappa)(\rho-x_0) \qquad (2)$$

Από το Δ3, ισχύει $f\left(\rho\right)+\rho=x_0 \Leftrightarrow \rho-x_0=-f\left(\rho\right)$, άρα η (2) γίνεται:

$$f(\rho)-f(x_0)<-f'(\kappa)\cdot f\left(\rho\right)\Leftrightarrow f(\rho)+f'(\kappa)f\left(\rho\right)<f(x_0)\Leftrightarrow f(x_0)>f\left(\rho\right)\left(f'(\kappa)+1\right)$$