ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΦΥΣΙΚΗ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

&

ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΥΓΕΙΑΣ (12/06/2019)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

Στις ερωτήσεις Α1-Α4 να γράψετε στο τετράδιο σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση.

A_1 Δύο συγχρονές πηγές Π1 και Π2 δημιουργούν στην επιφάνεια υγρού αρμονικά κύματα ίδιου πλάτους Α και ίδιας συχνότητας f, τα οποία συμβάλλουν.Τα σημεία της επιφάνειας του υγρού στα οποία έχουν φτάσει και τα δύο κυματα:

α) ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα και διαφορετικά πλάτη με τιμές που κυμαίνονται από 0 εώς Α

β) **ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα και διαφορετικά πλάτη με τιμές που κυμαίνονται από 0 εώς 2Α**

γ) ταλαντώνονται με διαφορετικές συχνότητες και διαφορετικά πλάτη

δ) ταλαντώνονται με διαφορετικές συχνότητες και ίδιο πλάτος

(5 μονάδες)

A_2 Κατά μήκος δύο όμοιων ομογενών και ελαστικών χορδών (1) και (2) διαδίδονται δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με την ίδια ταχύτητα. Το κύμα στη χορδή (1) έχει διπλάσια συχνότητα και το μισό πλάτος από αυτό στη χορδή (2). Τότε:

α) το μήκος κύματος στη χορδή (1) είναι ίσο με το μήκος κύματος στη χορδή (2)

β) το μήκος κύματος στη χορδή (1) είναι διπλάσιο από το μήκος κύματος στη χορδή (2) γ) η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των σωματιδίων της χορδής (1) είναι ίση με τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των σωματιδίων της χορδής (2)

δ) η μέγιστη επιτάχυνση της ταλάντωσης των σωματιδίων της χορδής (1) είναι μικρότερη από τη μέγιστη επιτάχυνση ταλάντωσης των σωματιδίων της χορδής (2)

A_3 Ένα σώμα εκτελέι φθίνουσα ταλάντωση με δύναμη αντίστασης στην κίνηση της μορφής $F = -bu$, όπου u η ταχύτητα ταλαντωσης του σώματος. Η σταθερά απόσβεσης b στο διεθνές σύστημα μοναδων μέτρησης $(S.I.)$ μετρίεται σε:

α) kg/s

β) kg/s^2

γ) $kg \cdot m/s$

δ) $kg \cdot m/s^2$

A_4 Ένας υδραυλικός ανυψωτήρας της μορφής του Σχήματος 1 έχει δύο αβαρή έμβολα που μπορούν να κινούνται χωρίς τριβές και περιέχει ιδανικό ασυμπίεστο υγρό. Το μικρό έμβολο έχει εμβαδόν εγκάρσιας διατομής A1 και το μεγάλο έμβολο έχει εμβαδόν εγκάρσιας διατομή $A_2 = 3A_1$. Αρχικά τα έμβολα βρίσκονται ακίνητα στο οριζόντιο επίπεδο. Ασκούμε δύναμη στο μικρό έμβολο και τη στιγμή που αυτό έχει κατέβει κατά d_1, το μεγάλο έμβολο έχει ανέβει κατά d_2. Για τις αποστάσεις d_1 και d_2 ισχύει:

α) $d_1 = 1,5d_2$

β) $d_1 = 2d_2$

γ) $d_1 = 3d_2$

δ) $d_1 = 4d_2$

A_5 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση είναι λάνθασμένη.

α) Μικρή σφαίρα μάζας m κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και σε διευθυνση κάθετη σε κατακόρυφο τοίχο και συγκρούεται ελαστικά με αυτόν. Αν το μέτρο της ορμής της σφαίρας ακριβώς πριν την κρούση είναι ίσο με p, τότε το μέτρο της μεταβολής της ορμής της σφαίρας λόγω της κρούσης με τον τοίχο είναι ίσο με το μηδέν. **(Λ)**

β) Από τη συνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων της ίδιας διεύθυνσης που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο με το ίδιο πλάτος και με συχνότητες που διαφέρουν πολύ λίγο μεταξύ τους, προκύπτει περιοδική κίνηση που παρουσιάζει διακροτήματα. **(Σ)**

γ) Όταν ρέει ιδανικό ρευστό με σταθερή παροχή σε οριζόντιο κυλινδρικό σωλήνα μεταβλητής διατομής, στις περιοχές στις οποίες το εμβαδόν της εγκάρσιας διατομής αυξάνεται, η πίεση μειώνεται. **(Λ)**

δ) Σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση το πλάτος της ταλαντωσης εξαρτάται από τη συχνότητα του διεγέρτη και τη σταθερά απόσβεσης b. **(Σ)**

ϵ) Όταν σε ένα αρχικά ακίνητο και ελεύθερο στερεό σώμα ασκηθεί δύναμη που ο φορέας της διέρχεται από το κέντρο του στερέου, τότε το στερεό σώμα δεν περιστρέφεται **(Σ)**

Θέμα Β

B_1 Παρατηρητής Α είναι ακίνητος σε μικρή απόσταση από σώμα Σ1 μάζας μπου κινείται με ταχύτητα $u_s = \frac{u_H}{20}$(όπου u_H ταχύτητα του ήχου στον ακίνητο αέρα) και απομακρύνεται απ' αυτόν.Οπαρατηρητής και η πηγή βρίσκονται στην ίδια οριζόντια διεύθυνση όπως φαίνεται στο σχήμα 2.Το σώμα Σ1 φέρει πηγή που εκπέμπει ήχο συχνότητας fs. Όσο η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή, αυτός αντιλαμβάνεται ήχο συχνότητας $f1$. Κατά την κίνησή του το σώμα Σ1 συγκρούεται πλαστικά με ίδιο σώμα Σ2 που είναι ακίνητο. Κατά την κρούση, που είναι ακαριαία, η πηγή δεν καταστρέφεται και το συσσωμάτωμα συνεχίζει να κινείται προς την ίδια κατεύθυνση. Ο παρατηρητής μετά την κρούση αντιλαμβάνεται ήχο συχνότητας $f2$. Ο λόγος των συχνοτήτων $f1$ και $f2$ που ακούει ο παρατηρητής είναι ίσος με:

α) $\frac{39}{42}$

β) $\frac{41}{42}$

γ) $\frac{38}{39}$

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Λύση

Αρχικά ο Α αντιλαμβάνεται

$$f_1 = \frac{u_{HX}}{u_{HX}+u_s} f_s \Rightarrow$$
$$f_1 = \frac{u_{HX}}{u_{HX}+\frac{u_{HX}}{20}} f_s \Rightarrow$$
$$f_1 = \frac{u_{HX}}{u_{HX}\frac{21}{20}} f_s \Rightarrow$$
$$f_1 = \frac{20}{21} f_s$$

Κατά την κρούση έχω ΑΔ:

$$P_{\alpha\rho\chi} = P_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow$$
$$mu_j = (m+m)V_k \Rightarrow$$
$$V_k = \frac{u_s}{2} \Rightarrow$$
$$V_k = \frac{u_H}{40}$$

Η συχνότητα που ακούει τώρα είναι :

$$f_2 = \frac{u_{HX}}{u_{HX}+V_k} f_s \Rightarrow$$
$$f_2 = \frac{u_{HX}}{u_{HX}+\frac{u_{HX}}{40}} f_s \Rightarrow$$
$$f_2 = \frac{u_{HX}}{\frac{41u_{HX}}{40}} f_s \Rightarrow$$
$$f_2 = \frac{40}{41} f_s \Rightarrow$$

Άρα

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{20}{21}f_s}{\frac{40}{41}f_s} \Rightarrow$$
$$\boxed{\frac{f_1}{f_2} = \frac{41}{42}}$$

B_2 Στον οριζόντιο κυλινδρικό σωλήνα ΒΓ μεταβλητής διατομής του σχήματος 3, ρέει με σταθερή παροχή νερό, το οποίο θεωρείται ιδανικό ρευστό με φορά από το Β προς το Γ.Για τα εμβαδά των εγκαρσίων διατομών των περιοχών (1) και (2),αντίστοιχα, ισχύει $A_1 = 2A_2$. Σε σημείο Δ της περιοχής (1) έχουμε προσαρμόσει ένα λεπτό κατακόρυφο σωλήνα,στον οποίο η ελεύθερη επιφάνεια του νερού βρίσκεται σε ύψος h από την οριζόντια διεύθυνση χ΄χ. ο νερό που εξέρχεται από το στόμιο Γ του σωλήνα χύνεται σε δοχείο μεγάλου όγκου που είναι στερεωμένο σε οριζόντιο έδαφος. Στη βάση του δοχείου στη θέση (3) υπάρχει μικρή οπή Ζ με εμβαδόν διατομής $A_3 = \frac{A_2}{2}$. Λόγω της εξόδου του νερού από την οπή Ζ το δοχείο δεν μπορεί να γεμίσει και η ελεύθερη επιφάνεια του νερού σταθεροποιείται σε ύψος Η (Σχήμα 3). Ο λόγος του ύψους h του νερού στον κατακόρυφο σωλήνα προς το ύψος H του νερού στο δοχείο είναι ίσος με:

$\alpha)$ $\frac{3}{4}$
$\beta)$ $\frac{3}{8}$
$\gamma)$ $\frac{3}{16}$

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Λύση

Αρχικά θα εφαρμόσουμε εξίσωση *Bernoulli* από το $B \longrightarrow \Gamma$ άρα θα έχουμε ότι:

$$P_B + \frac{1}{2}\varrho u_B^2 = P_\Gamma + \frac{1}{2}\varrho u_\Gamma^2$$

όμως:
$P_B = P_\Delta = P_{atm} + \varrho \cdot g \cdot h$
$A_B \cdot u_B = A_\Gamma \cdot u_\Gamma \Rightarrow u_\Gamma = 2u_B$
Επομένως η παραπάνω εξίσωση *Bernoulli* θα γίνει ίση με:

$$P_{atm} + \varrho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2}\varrho\frac{u_\Gamma^2}{4} = P_{atm} + \frac{1}{2}\varrho \cdot u_\Gamma^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{u_\Gamma = \sqrt{\frac{8}{3}g \cdot h}}$$

Εφαρμόζουμε εξίσωση *Bernoulli* από το $k \longrightarrow z$ (όπου κ είναι η επιφάνεια του υγρού) άρα θα έχουμε ότι:

$$P_K + \varrho \cdot g \cdot H + \frac{1}{2}\varrho u_K^2 = P_Z + \frac{1}{2}\varrho \cdot u_Z^2$$

όμως έχουμε ότι:
$P_K = P_Z = P_{atm}$
$u_K = 0$
Συνδιάζοντας τις παραπάνω σχέσεις έχουμε τελικά ότι:

$$\varrho \cdot g \cdot H = \frac{1}{2}\rho u_Z^2 \Rightarrow \boxed{u_Z = \sqrt{2g \cdot H}}$$

Τέλος δεν θα πρέπει να ξεχνάμε ότι η στάθμη του δοχείου παραμένει σε σταθερή στάθμη αυτό σημαίνει ότι όση παροχή νερού εισέρχεται σε αυτό, τόση θα εξέρχεται. Συγκεκριμένα θα έχουμε ότι:

$$\Pi_{in} = \Pi_{out} \Rightarrow$$
$$A_\Gamma \cdot u_\Gamma = A_Z \cdot u_Z \Rightarrow$$
$$A_\Gamma \cdot u_\Gamma = \frac{A_\Gamma}{2} \cdot u_Z \Rightarrow$$
$$\sqrt{\frac{8}{3}g \cdot h} = \frac{1}{2}\sqrt{2g \cdot H} \Rightarrow$$
$$\boxed{\frac{h}{H} = \frac{3}{16}}$$

B_3 $\alpha)$ $\frac{1}{6}$

$\beta)$ $\frac{1}{3}$

$\gamma)$ $\frac{4}{3}$

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Λύση

Το παραπάνω ερώτημα μπέρδεψε αρκετούς μαθητές και αυτό γιατί νόμιζαν ότι η ράβδος κινείται στο κατακόρυφο επίπεδο. Η ράβδος στην συγκεκριμένη άσκηση βρισκόταν πάνω στο επίπεδο δηλαδή η φωτογραφία της ράβδου ήταν η κάτοψη της. Συνεπώς η δύναμη του βάρους δεν λαμβάνεται υποψιν στο Θ.Μ.Κ.Ε. που θα εφαρμοστεί

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε. από την $A \longrightarrow \Delta$

$$K_\Delta - K_A = W_F \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2}I \cdot \omega_\Delta^2 = F \cdot \Delta s \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}M \cdot L^2 \cdot \omega_\Delta^2 = F \cdot L \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \omega_\Delta = 3\pi rad$$

Στην συνέχεια σφηνώνεται ένα βλήμα άρα θα εφαρμόσουμε Α.Δ.Σ.Κ.

$$L_{initial} = L_{final} \Rightarrow$$
$$I \cdot \omega_\Delta = I_{o\lambda} \cdot \omega \Rightarrow$$
$$\frac{1}{3}M \cdot L^2 \cdot \omega_\Delta = (\frac{1}{3}M \cdot L^2 + m \cdot L^2) \cdot \omega \Rightarrow$$
$$\omega = \frac{3\pi}{2} rad/s$$

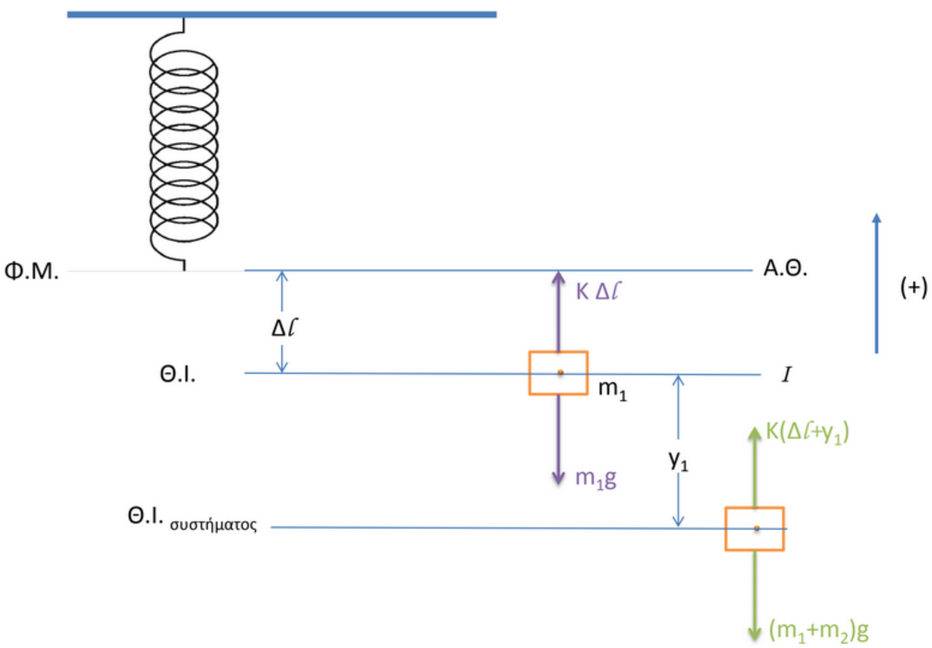
Μετά την κρούση το σύστημα εκτελέι Ο.Κ.Κ. άρα θα ισχύει ότι:

$$\omega = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$$
$$\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{1}{3}s}$$

Θέμα Γ

Γ$_1$ *Λύση*

Αρχικά για να λύσουμε την παραπάνω άσκηση είναι χρήσιμο το ακόλουθο σχήμα:



Για την θέση ισορροπίας του m_1 ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \Sigma F_{y'y} = k \cdot \Delta l - m_1 \cdot g \\ \\ \bullet\ \Sigma F_{x'x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow k \cdot \Delta l = m_1 \cdot g \Rightarrow \qquad (1)$$

$$\Rightarrow k = \frac{m_1 \cdot g}{\Delta l} \Rightarrow$$

$$\boxed{k = 200\ N/m}$$

Γ_2 ***Λύση***

Αρχικά θα εφαρμόσουμε Α.Δ.Ο. κατά την διάρκεια της πλαστικής κρούσης επομένως θα έχουμε ότι:

$$m_2 \cdot u_o = (m_1 + m_2) \cdot V \Rightarrow V = \frac{u_o}{2}$$

Ευρεση της ταχύτητας u_o του βλήματος

Α τρόπος

Στην συνέχεια εφαρμόζουμε Α.Δ.Ε.Τ. την στιγμή πουτ γίνεται η κρούση (κατάσταση Ι) μέχρι την ακραία θέση

$$\begin{aligned} K_I + U_I &= \frac{1}{2} D \cdot A^2 \Rightarrow \\ \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot V^2 + \frac{1}{2} D \cdot \Delta l^2 &= \frac{1}{2} D \cdot A^2 \Rightarrow \\ (m_1 + m_2) \cdot (\frac{u_o}{m_1 + m_2})^2 + k \cdot \Delta l^2 &= 4k \cdot \Delta l^2 \Rightarrow \\ \frac{u_0^2}{2} + 200 \cdot 25 \cdot 10^{-4} &= 200 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \\ u_o &= \sqrt{6 \cdot 25 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} \Rightarrow \\ &\boxed{u_o = \sqrt{3}\ m/s} \end{aligned}$$

Β τρόπος

Με χρήση του Θ.Μ.Κ.Ε. από την κατάσταση Ι μέχρι την ακραία του θέση που θα μηδενιστεί και η ταχύτητα του

$$0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = W_{F_{\epsilon\lambda}} + W_w \Rightarrow$$
$$-\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = U_I - U_{\phi\mu} - (m_1 + m_2) \cdot g \cdot \Delta l \Rightarrow$$
$$-\frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot V^2 = \frac{1}{2}k \cdot \Delta l^2 - (m_1 + m_2) \cdot g \cdot \Delta l \Rightarrow$$
$$-\frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot (\frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot u_o)^2 = \frac{1}{2}k \cdot \Delta l^2 - (m_1 + m_2) \cdot g \cdot \Delta l \Rightarrow$$
$$\frac{m^2}{m_1 + m_2} \cdot u_o^2 = -k \cdot \Delta l^2 + 2(m_1 + m_2) \cdot g \cdot \Delta l \Rightarrow$$
$$\boxed{u_o = \sqrt{3}\ m/s}$$

Επομένως η κινητική ενέργεια του σώματος m_2 λίγο πριν την κρούση θα είναι ίση με:

$$K_2 = \frac{1}{2}m_2 \cdot u_o^2 \Rightarrow$$
$$\boxed{K_2 = 1.5\ J}$$

Γ_3 *Λύση*

Η μεταβολή της ορμής του σώματος m_2 θα είναι ίση με:

$$\Delta p_2 = p_{2(final)} - p_{2(initial)} \Rightarrow$$
$$\Delta p_2 = m_2 \cdot V - m_2 \cdot u_o \Rightarrow$$
$$\Delta p_2 = m_2 \cdot (\frac{u_o}{2} - u_o) \Rightarrow$$
$$\Delta p_2 = -\frac{1}{2}m_2 \cdot u_o \Rightarrow$$
$$\boxed{\Delta p_2 = -15\sqrt{3} \cdot 10^{-1}\ Kg \cdot m/s}$$

Το πρόσημο μείον δηλώνει ότι η κατεύθυνση της μεταβολής της ορμής είναι προς τα κάτω

Γ_4 *Λύση*

Αρχικά θα βρούμε την γωνιακή ταχύτητα ω

$$k = (m_1 + m_2) \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = 10\ rad/s$$

Η γενική εξίσωση ταλάντωσης του συστήματος των δύο μαζών θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$y(t) = A \cdot \eta\mu(10 \cdot t + \phi_o)$$

Την χρονική στιγμή $t = 0$ (την χρονική στιγμή της κρούσης) το σύστημα των δύο μαζών όπως μπορούμε να διακρίνουμε και από το σχήμα βρίσκεται κατα Δl πάνω από την θέση ισορροπίας του συστήματος (αυτό μπορεί να αποδειχθεί εύκολα από συνθήκη ισορροπίας του συστήματος των μαζών m_1 και m_2). Συνεπώς η αρχική φάση είναι ίση με $\phi_o = \frac{\pi}{6}\ rad$. Τελικά θα έχουμε ότι:

$$y(t) = 0.1 \cdot \eta\mu(10t + \frac{\pi}{6})$$

Θέμα Δ

Δ_1 Να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης

Λύση

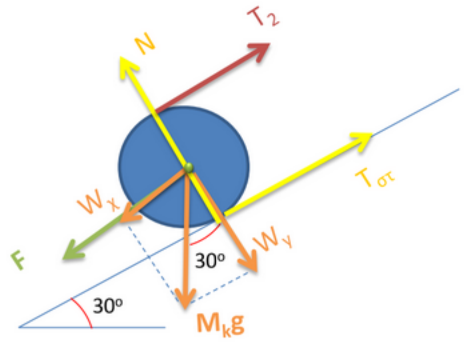
Για το σώμα Σ ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \Sigma F_{y'y} = M_{\Sigma} \cdot g - T_1 \\ \bullet\ \Sigma F_{y'y} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{T_1 = M_{\Sigma} \cdot g} \qquad (2)$$

Για την τροχαλία ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \Sigma\tau = T_1' \cdot R_T - T_2' \cdot R_T \\ \bullet\ \Sigma\tau = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{T_1' = T_2'} \qquad (3)$$

Για τον κύλινδρο ισχύει:



Μεταφορικά

- $\Sigma F_{x'x} = F + w_x - T_2 - T_{\sigma\tau}$
- $\Sigma F_{x'x} = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma F_{x'x} = F + w_x - T_2 - T_{\sigma\tau}\\ \Sigma F_{x'x} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{F + M_K \cdot g \cdot \eta\mu(30^o) = T_2 + T_{\sigma\tau}} \tag{4}$$

Στροφικά

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma\tau = T_2 \cdot R_K - T_{\sigma\tau} \cdot R_K\\ \Sigma\tau = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{T_{\sigma\tau} = T_2} \tag{5}$$

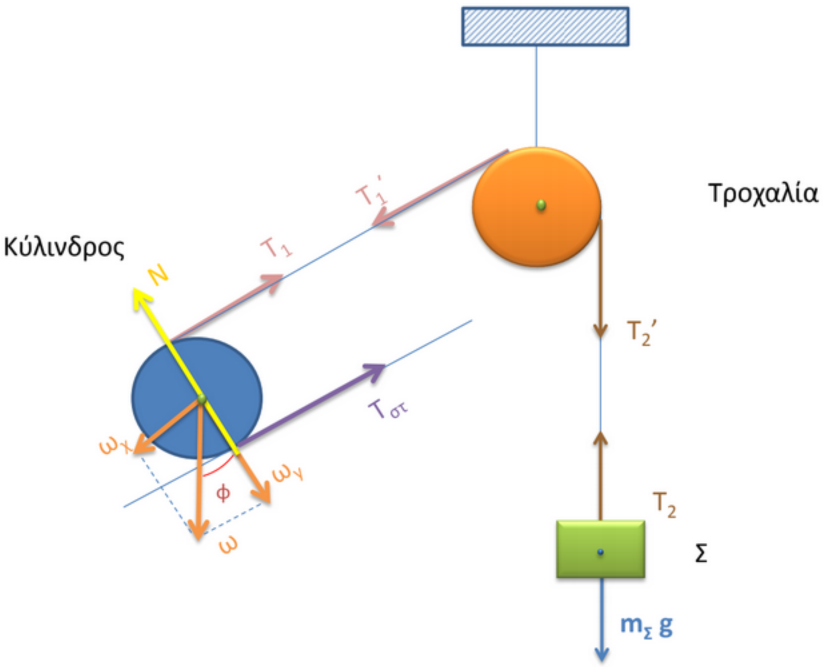
Συνδιάζοντας τις παραπάνω τέσσερις σχέσεις προκύπτει τελικά ότι:

$$\boxed{F = 30\ N}$$

Δ_2 Να αποδείξετε ότι το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία κατέρχεται το σώμα Σ είναι ίσο με $a_\Sigma = 4\ m/s^2$ και να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρο μάζας του κυλίνδρου

Λύση

Σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα έχουμε:



Αρχικά θα πρέπει να συσχετίσουμε τις επιταχύνσεις του κέντρο μάζας του κυλίνδρου a_K και της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του σώματος a_Σ. Από θεωρία γνωρίζουμε ότι $\boxed{a_\Sigma = 2a_K}$

Επομένως έχουμε:

Για το σώμα Σ ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \Sigma F_{y'y} = M_\Sigma \cdot g - T_2 \\ \bullet\ \Sigma F_{y'y} = M_\Sigma \cdot a_\Sigma (2os N.N.) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{M_\Sigma \cdot g - T_2 = M_\Sigma \cdot a_\Sigma} \qquad (6)$$

Για την τροχαλία ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \Sigma\tau = T_2' \cdot R_T - T_1' \cdot R_T \\ \bullet\ \Sigma\tau = I \cdot \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{T_2' - T_1' = \frac{1}{2} M_T \cdot R_T^2 \cdot \alpha} \Rightarrow \qquad (7)$$

$$\Rightarrow \boxed{2T_2' - 2T_1' = M_T \cdot a_\Sigma}$$

Συνδιάζοντας τις δύο γραμμοσκιασμένες σχέσεις προκύπτει η ακόλουθη:

$$2T_1' = 2M_\Sigma \cdot g - 2M_\Sigma \cdot a_\Sigma - M_T \cdot a_\Sigma \qquad (8)$$

Για τον κύλινδρο ισχύει:

Μεταφορικά

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \Sigma F_{x'x} = T_1 + T_{\sigma\tau} - w_x \\ \bullet\ \Sigma F_{x'x} = M_K \cdot a_K (2os N.N.)\end{array}\right\} \Rightarrow T_1 + T_{\sigma\tau} - M_K \cdot g \cdot \eta\mu(30^o) = M_K \cdot \frac{a_\Sigma}{2} \Rightarrow \tag{9}$$

$$\Rightarrow \boxed{2T_1 + 2T_{\sigma\tau} - M_K \cdot g = M_K \cdot a_\Sigma} \tag{10}$$

Στροφικά

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \Sigma\tau = T_1 \cdot R - T_{\sigma\tau} \cdot R \\ \bullet\ \Sigma\tau = I \cdot \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow T_1 \cdot R_K - T_{\sigma\tau} \cdot R_K = \frac{1}{2} M_K \cdot R_K^2 \cdot \alpha \Rightarrow \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 2T_1 - 2T_{\sigma\tau} = M \cdot a_K \Rightarrow \\ &2T_1 - 2T_{\sigma\tau} = M \frac{a_\Sigma}{2} \Rightarrow \\ &4T_1 - 4T_{\sigma\tau} = M \cdot a_\Sigma \end{aligned} \tag{12}$$

Συνδιάζοντας τις εξισώσεις 12 και 10 προκύπτει τελικά ότι:

$$8T_1 - 2M_K \cdot g = 2M_K \cdot a_\Sigma + M_K \cdot a_\Sigma \tag{13}$$

Τέλος συνδιάζοντας τις σχέσεις 8 και 13 προκύπτει τελικά ότι:

$$a_\Sigma = 4\ m/s^2$$

ενώ η επιτάχυνση του κέντρου μάζας θα είναι ίση με

$$a_{c.m.} = a_K = 2\ m/s^2$$

Δ_3 Να υπολογίσετε την χρονική στιγμή t_2 στην οποία ο κύλινδρος σταματά στιγμιαία να κινείται πάνω στην σανίδα

Λύση

Αρχικά ας υπολογίσουμε την ταχύτητα που θα έχει ο κύλινδρος την χρονική στιγμή $t_1 = 0.5\ s$ κατά την οποία κόπηκε το νήμα.

$$\begin{aligned} u(0.5) &= u(0) + a_K \cdot (0.5 - 0) \Rightarrow \\ u(0.5) &= 1 m/s \end{aligned}$$

Ευρεση της χρονικής στιγμής t_2 που ο κύλινδρος σταματάει

Α τρόπος

Την στιγμή που κόπηκε το νήμα ($t_1 = 0.5\ s$) ο κύλινδρος επιβραδύνεται μέχρι να σταματήσει επομένως θα ισχύει:

Μεταφορικά:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \Sigma F_{x'x} = T_{\sigma\tau} - w_x \\ \bullet\ \Sigma F_{x'x} = M_K \cdot a'_K (2os N.N.) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{T_{\sigma\tau} - w_x = M_K \cdot a'_K} \tag{14}$$

Στροφικά:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \Sigma\tau = -T_{\sigma\tau} \cdot R_K \\ \bullet\ \Sigma\tau = I \cdot \alpha' \end{array}\right\} \Rightarrow -T_{\sigma\tau} \cdot R_K = \frac{1}{2} M_K \cdot R_K^2 \cdot \alpha' \Rightarrow \tag{15}$$

$$\Rightarrow \boxed{-T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2} M_K \cdot a'_K} \tag{16}$$

Συνδιάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις σχέσεις 14 και 16 προκύπτει τελικά ότι:

$$a'_K = -\frac{10}{3}\ m/s^2$$

Επομένως η παραπάνω επιτάχυνση είναι αυτή που θα αποκτήσει ο κύλινδρος από την στιγμή που κόπηκε το νήμα μέχρι να ακινητοποιηθεί. Έστω t_2 η χρονική στιγμή κατά την οποία ο κύλινδρος σταματάει. Θα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} u(t_2) &= u(t_1) + a'_K(t_2 - 0.5) \Rightarrow \\ 0 &= 1 - \frac{10}{3}(t_2 - 0.5) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{t_2 = 0.8\ s} \end{aligned}$$

Β τρόπος

Θα εφαρμόσουμε Θ.Μ.Κ.Ε. από την στιγμή που κόβεται το νήμα μέχρι την στιγμή που ο κύλινδρος θα σταματήσει άρα θα έχουμε ότι:

$$0-\frac{1}{2}M_K\cdot u^2(0.5)-\frac{1}{2}I\cdot\omega^2(0.5)=-M_k\cdot g\cdot\eta\mu(30^o)\Delta x\Rightarrow$$
$$\frac{1}{2}M_K\cdot u^2(0.5)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}M_K\cdot R_K^2\cdot\omega^2(0.5)=M_K\cdot g\cdot\frac{1}{2}\Delta x\Rightarrow$$
$$u^2(0.5)+\frac{1}{2}\cdot u^2(0.5)=g\cdot\Delta x\Rightarrow$$
$$\frac{3}{2}\cdot u^2(0.5)=g\cdot\Delta x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\boxed{\Delta x=\frac{3}{20}=0.15\ m}$$

Εχοντας τώρα υπολογίσει το διάστημα που θα διανύσει ο κύλινδρος μέχρι να σταματήσει μπορούμε να υπολογίσουμε τον χρόνο δια μέσου των κινηματικών σχέσεων συγκεκριμένα θα έχουμε ότι:

$$u(t_2)=u(0.5)+a\cdot(t_2-0.5)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow a=-\frac{1}{\Delta t}$$

Την παραπάνω σχέση θα την αντικαταστήσουμε στην σχέση της μετατόπισης

$$\Delta x=u(0.5)\cdot(t_2-0.5)+\frac{1}{2}(-\frac{1}{t_2-0.5})\cdot(t_2-0.5)^2\Rightarrow$$
$$\Delta x=\frac{1}{2}(t_2-0.5)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\boxed{t_2=0.8\ s}$$

Δ_4 Να υπολογίσετε το συνολικό διάστημα που διάνυσε ο κύλινδρος από την χρονική στιγμή $t=0$ έως την χρονική στιγμή t_2

Λύση

Το διάστημα που διήνυσε ο κύλινδρος από την στιγμή που καταργήθηκε η δύναμη $t=0$ έως την χρονική στιγμή που έσπασε το νήμα t_1 θα είναι ίσο με:

$$\Delta x_1=u(0)(0.5-0)+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(0.5-0)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\boxed{\Delta x_1=0.25m}$$

Το διάστημα που θα διανύσει ο κύλινδρος από την χρονική στιγμή t_1 έως την χρονική στιγμή t_2 το έχουμε ήδη υπολογίσει στο παραπάνω ερώτημα

δια μέσου του B τρόπου επίλυσης και βρήκαμε ότι $\Delta x_2 = 0.15\ m$.
Συνεπώς η συνολική απόσταση που διήνυσε ο κύλινδρος θα είναι ίση με:

$$\Delta x_{o\lambda} = 0.4\ m$$

Δ_5 Να δείξετε ότι κατά την διάρκεια της ανόδου του κυλίνδρου πάνω στην σανίδα, από την χρονική στιγμή $t = 0$ έως την χρονική στιγμή t_2, που ο κύλινδρος σταματά στιγμιαία, η σανίδα δεν ανατρέπεται

Λύση

Σε αυτό το ερώτημα θα υπολογίσουμε που θα έπρεπε να βρισκόταν ο κύλινδρος προκειμένου η ράβδος οριακά να ανατραπεί σε αυτή την περίπτωση η δύναμη που ασκεί το έδαφος στην ράβδο N_E θα ήταν οριακά ίση με το μηδέν επομένως θα ίσχυε ότι:

Για την ράβδο ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \Sigma\tau = M\cdot g\cdot(K\Gamma)\sigma\upsilon\nu(30^o) - N'\cdot(Z\Gamma) \\ \bullet\ \Sigma\tau = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M\cdot g\cdot(2-1.5)\sigma\upsilon\nu(30^o) &= N'\cdot(Z\Gamma) \Rightarrow \\ M\cdot g\cdot(2-1.5)\sigma\upsilon\nu(30^o) &= M_K\cdot g\cdot\sigma\upsilon\nu(30^o)\cdot(Z\Gamma) \Rightarrow \\ (Z\Gamma) &= \frac{M}{2M_K} \Rightarrow \\ (Z\Gamma) &= 0.5\ m \end{aligned}$$

Η παραπάνω απόσταση μετρούμενη από το σημείο Δ στο οποίο ήταν ο κύλινδρος την $t = 0$ θα είναι ίση με:

$$(\Delta Z) = (\Delta\Gamma) + (\Gamma Z) \Rightarrow (\Delta Z) = 0.7\ m$$

Ο κύλινδρος όμως γνωρίζουμε από το προηγούμενο ερώτημα ότι η μέγιστη απόσταση που θα διανύσει από το σημείο Δ (στο οποίο βρισκόταν την $t = 0$) είναι ίση με $0,4m$. **Συνεπώς σίγουρα η ράβδος δεν θα ανατραπεί!**

ΚΑΛΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ!!!