ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ (10/06/2019)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1.α) Σχ. βιβλίο σελ. 15

β) Σχ. βιβλίο σελ. 35

Α2. Σχ. βιβλίο σελ. 142

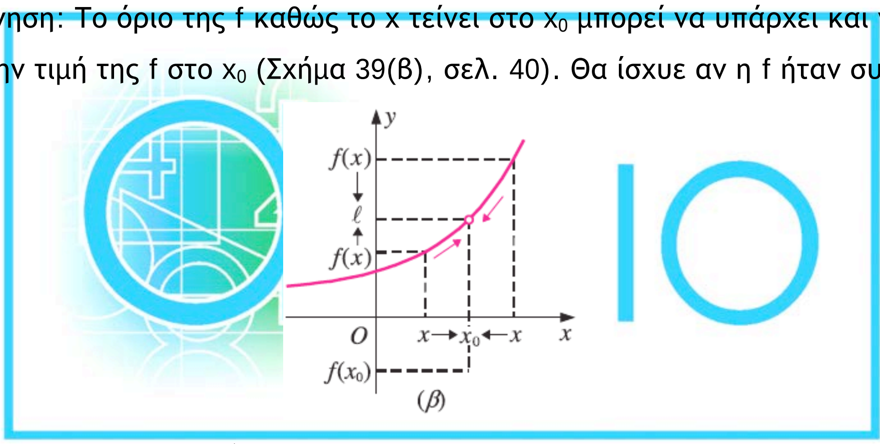
Α3. Σχ. βιβλίο σελ. 135

Α4. α) Λάθος

Αιτιολόγηση: Σχόλιο, σελ.134 σχολ.βιβλίου

β) Λάθος

Αιτιολόγηση: Το όριο της f καθώς το x τείνει στο x_0 μπορεί να υπάρχει και να μην είναι ίσο με την τιμή της f στο x_0 (Σχήμα 39(β), σελ. 40). Θα ίσχυε αν η f ήταν συνεχής στο x_0.



Α5. Σωστή απάντηση : γ $\left(\int_{\alpha}^{\delta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\delta} f(x)dx = 2-1+3=4\right)$

ΘΕΜΑ Β

$f(x) = e^{-x} + \lambda$

Β1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}+\lambda) = 2 \Leftrightarrow \lambda = 2$

διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ ($\alpha\varphi o\acute{\upsilon}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$)

Β2. για λ = 2 : $f(x) = e^{-x}+2, \quad D_f = R$

f(x) – x = 0 $\Leftrightarrow e^{-x}+2-x=0$

Έστω $g(x) = e^{-x}+2-x, \quad x\in[2,3]$

Η g είναι συνεχής στο $[2,3]$ ως άθροισμα εκθετικής και πολυωνυμικής

$g(2)=e^{-2}>0$ και $g(3)=e^{-3}<0,\ \ o\pi\acute{o}\tau\varepsilon \quad g(2)\cdot g(3)<0$

Άρα, από θεώρημα Bolzano, η εξίσωση g(x) = 0 έχει τουλάχιστον μια ρίζα x_0 στο διάστημα (2,3)

Όμως $g'(x)=-e^{-x}-1<0$, οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση και η εξίσωση g(x) = 0 μπορεί να έχει το πολύ μία ρίζα.

Άρα η ρίζα x_0 της g(x) = 0 είναι μοναδική.

Β3. Η f είναι συνεχής στο R ως εκθετική και $f'(x)=(e^{-x}+2)'=-e^{-x}<0.$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, οπότε είναι 1-1.

$$f(x)=y \Leftrightarrow e^{-x}+2=y \Leftrightarrow e^{-x}=y-2 \qquad (\mu\varepsilon\ \ y-2>0 \Leftrightarrow y>2)$$
$$-x=\ln(y-2)$$
$$x=-\ln(y-2)$$

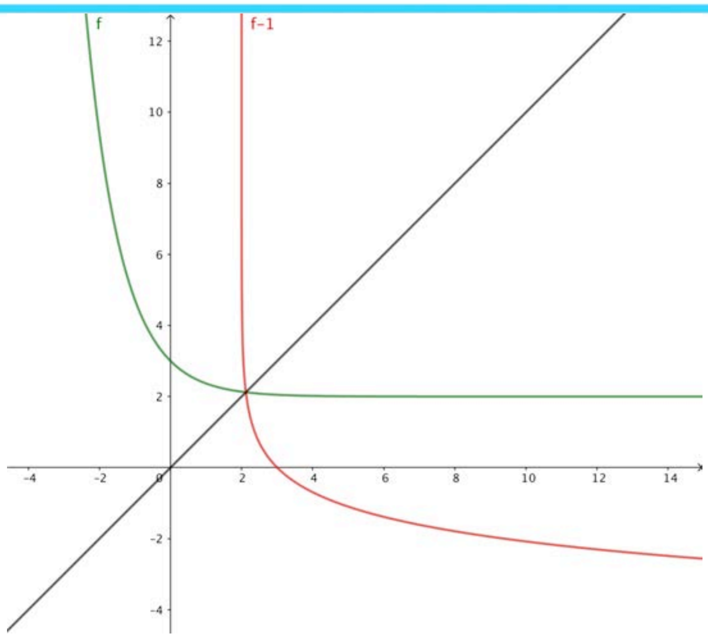
Άρα:

$$f^{-1}(y)=-\ln(y-2)$$
$$\acute{\eta} \quad f^{-1}(x)=-\ln(x-2) \quad D_{f^{-1}}=(2,+\infty)$$

Β4. Πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη η ε : x=2 (για $x\to 2^+$) αφού η f^{-1} είναι συνεχής (ως σύνθεση πολυωνυμικής με λογαριθμική) στο $(2,+\infty)$.

$$\lim_{x\to 2^+} f^{-1}(x = \lim_{x\to 2^+}\left[-\ln(x-2)\right] \overset{*}{=} \lim_{u\to 0^+}(-\ln u)=+\infty \quad (\alpha\varphi o\acute{\upsilon} \lim_{u\to 0^+}\ln u=-\infty)$$

* Θέτουμε x-2=u >0 άρα $\lim\limits_{x\to 2^+} u=\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, τότε θα είναι και συνεχής, επομένως πρέπει :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \mathrm{f}(1) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^+}(x^2+a) = \lim_{x\to 1^-}(e^{x-1}+\beta^x) = 1+\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+a = 1+\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta \qquad (1)$$

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη πρέπει $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

Έχουμε :

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+\cancel{a}-\cancel{a}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 2$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-a-1}{x-1} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+ax-a-1}{x-1} \underset{DLH^*}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+a}{1} = 1+a$$

$$(*)\ \lim_{x\to 1^-} e^{x-1} = 1, \text{ άρα } \lim_{x\to 1^-}\left(e^{x-1}+\alpha x-\alpha-1\right) = 0$$

Οπότε πρέπει : 1+α = 2 ⇔ α = 1 και β = 1

Γ2. $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x\geq 1 \\ e^{x-1}+x, & x<1 \end{cases}$

για x≥1 : $f'(x) = (x^2+1)' = 2x > 0$ αφού $x\geq 1>0$ άρα η f γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

για x<1 : $f'(x) = (e^{x-1}+x)' = e^{x-1}+1>0$ άρα η f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1)$

ΑΡΑ (αφού είναι συνεχής στο $x_0=1$) η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο A = R, το σύνολο τιμών της θα είναι :

$$f(A) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty,+\infty) = R$$

διότι:

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{x}) = -\infty$

$$\text{αφού } \lim_{x\to-\infty} e^{x-1} \overset{*}{=} -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

(∗) Θέτω x-1 = u: $\lim_{x\to-\infty} u = \lim_{x\to-\infty}(x-1) = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

Άρα $\lim_{x\to-\infty} e^{x-1} = \lim_{u\to-\infty} e^u = 0$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^2+1) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

Γ3. i)

- Για $x \geq 1$: $f(x) = x^2 + 1 > 0$, άρα η f δεν έχει ρίζα στο $[1, +\infty)$
- Για $x < 1$: $f(x) = e^{x-1} + x$

  η f είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ και

  $f(-1) = e^{-2} - 1 = \dfrac{1}{e^2} - 1 = \dfrac{1 - e^2}{e^2} < 0$

  $f(0) = e^{-1} = \dfrac{1}{e} > 0$

Δηλαδή $f(-1) \cdot f(0) < 0$ άρα, από θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-1, 0)$ ώστε $f(x_0) = 0$. Η ρίζα x_0 είναι μοναδική , αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο Γ .

ii) $f^2(x) - x_0 \cdot f(x) = 0 \qquad (2)$

Έστω ότι η (2) έχει μία ρίζα $x_1 \in (x_0 + \infty)$. Τότε

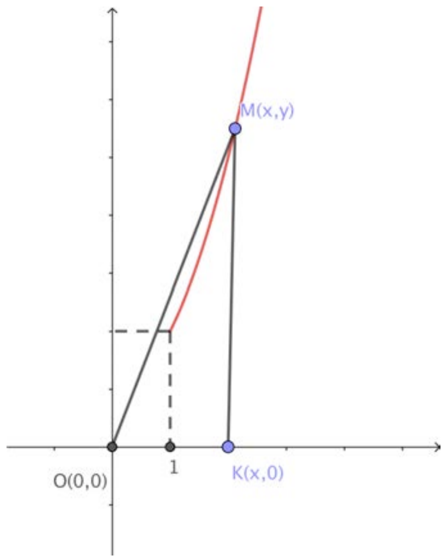
$f^2(x_1) - x_0 \cdot f(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) \cdot \big(f(x_1) - x_0\big) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = 0 \quad ή \quad f(x_1) = x_0$

- Το $f(x_1) = 0$ είναι άτοπο, αφού το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της f(x) = 0.
- Το $f(x_1) = x_0$ είναι επίσης άτοπο, διότι :
  - αν $x_1 \in (x_0, 1]$ τότε $f(x_1) = x_0 \Leftrightarrow x_1^2 + 1 = x_0$ ΑΔΥΝΑΤΗ αφού $x_0 < 0$
  - αν $x_1 \in (1, +\infty)$ τότε $f(x_1) = x_0 \Leftrightarrow e^{x_1 - 1} + x_1 = x_0 \Leftrightarrow e^{x_1 - 1} = x_0 - x_1$

    ΑΔΥΝΑΤΗ αφού $x_0 - x_1 < 0$

ΑΡΑ , η εξίσωση (2) δεν έχει καμία ρίζα στο $(x_0, +\infty)$.

Γ4. Για $x \geq 1$: $y = f(x) = x^2 + 1$



Είναι (ΟΚ) = x και (ΚΜ) = y = x^2+1.

Το εμβαδόν του $M\overset{\Delta}{O}K$ είναι :

$$(MOK)=\frac{1}{2}(OK)\cdot(KM)=\frac{1}{2}x(x^2+1)=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x$$

Έστω E(t) = $\frac{1}{2}x^3(t)+\frac{1}{2}x(t),\quad x(t)\geq 1$

$$E'(t)=\frac{3}{2}x^2(t)\cdot x'(t)+\frac{1}{2}x'(t)$$

Τη χρονική στιγμή t_0, είναι $x(t_0)=3$ και $x'(t_0)=2$ οπότε :

$$E'(t_0)=\frac{3}{2}x^2(t_0)\cdot x'(t_0)+\frac{1}{2}x'(t_0)=\frac{3}{2}\cdot 3^2\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2=28\,\mu o\nu \acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma\,/\,\delta\varepsilon\upsilon\tau\varepsilon\rho\acute{o}\lambda\varepsilon\pi\tau o.$$

ΘΕΜΑ Δ

Πρέπει $x^2-2x+2>0$, που ισχύει για κάθε x∈R (Δ<0), άρα $D_f=R$

Δ1. $f(x)=(x-1)\cdot\ln(x^2-2x+2)+ax+\beta$

$f(1)=1\Leftrightarrow a+\beta=1\quad(1)$

$f(1)=-1\qquad(2)$

$$f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+(x-1)\frac{1}{x^2-2x+2}(2x-2)+a=\ln(x^2-2x+2)+2\frac{(x-1)^2}{x^2-2x+2}+a$$

οπότε (2) $\Rightarrow \ln 1+0+a=-1\Leftrightarrow a=-1$

Άρα (1) $\Rightarrow \beta=2$

Δ2.Για α =-1 και β = 2 : $f(x)=(x-1)\cdot\ln(x^2-2x+2)-x+2$

f συνεχής στο Γ (x-1 και –x+2 συνεχείς ως πολ/κες, $\ln(x^2-2x+2)$ συνεχής ως σύνθεση πολ/κης με λογαριθμική)

$$E(\Omega)=\int_1^2|f(x)+x-2|\,dx=\int_1^2|(x-1)\cdot\ln(x^2-2x+2)|dx$$

- για $x\in[1,2]$: $1\leq x\leq 2$ έχουμε x-1≥ 0
- $x^2-2x+2=x^2-2x+1+1=(x-1)^2+1\geq 1$ άρα $\ln(x^2-2x+2)\geq 0$

Επομένως, $E(\Omega)=\int_1^2(x-1)\cdot\ln(x^2-2x+2)dx=\frac{1}{2}\int_1^2(2x-2)\cdot\ln(x^2-2x+2)dx$

Θέτουμε :

$u=x^2-2x+2$

$du=(2x-2)dx$

$\gamma\iota\alpha\ x=1\Rightarrow u=1$

$\gamma\iota\alpha\ x=2\Rightarrow u=2$

Άρα

$$E(\Omega)=\frac{1}{2}\int_1^2 \ln u\,du=\frac{1}{2}\int_1^2 (u)'\ln u\,du=\frac{1}{2}\left(\left[u\cdot\ln u\right]_1^2-\int_1^2 u\cdot(\ln u)'du\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(2\ln 2-\ln 1-\int_1^2 1du)=\frac{1}{2}\left(2\ln 2-\left[u\right]_1^2\right)=\frac{1}{2}(2\ln 2-1)=\ln 2-\frac{1}{2}\ \ \text{τετρ.μονάδες}$$

Δ3. i) Από Δ1 για α = - 1 έχουμε: $f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+2\dfrac{(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1$

Στο Δ2 αποδείχθηκε ότι $\ln(x^2-2x+2)\geq 0$.

Επίσης , $2\dfrac{(x-1)^2}{x^2-2x+2}\geq 0$ (αφού $x^2-2x+2>0$ και $(x-1)\geq 0$ για κάθε $x\in R$

Άρα έχουμε $\ln(x^2-2x+2)+2\cdot\dfrac{(x-1)^2}{x^2-2x+2}\geq 0 \Leftrightarrow f'(x)\geq -1$ για κάθε $x\in R$

ii) $f\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)+\lambda\geq(\lambda-1)\cdot\ln(\lambda^2-2\lambda+2)+\dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow f\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}\geq(\lambda-1)\cdot\ln(\lambda^2-2\lambda+2)-\lambda+2$

$\Leftrightarrow f\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}\geq f(\lambda)$ που ισχύει για κάθε $\lambda\in R$, διότι:

- f συνεχής στο $\left[\lambda,\lambda+\dfrac{1}{2}\right]\in R$ (από Δ2)
- f παραγωγίσιμη στο $\left(\lambda,\lambda+\dfrac{1}{2}\right)$ με $f'(x)\geq -1$ (από Δ3i)

Άρα σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in\left[\lambda,\lambda+\dfrac{1}{2}\right]$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}=\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}$$

Από Δ3 έχουμε $f'(\xi)\geq -1 \Leftrightarrow \dfrac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}\geq -1 \Leftrightarrow f\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)-f(\lambda)\geq -\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\geq f(\lambda)$$

Δ4. $g(x) = -x^3 - x + 2$ και $g'(x) = -3x^2 - 1$

Ελέγχουμε αν η (ε): y = - x + 2, που γνωρίζουμε από την εκφώνηση ότι η (ε) εφάπτεται στη C_f στο Α(1,1), εφάπτεται και στη C_g σε κάποιο σημείο $M(x_1, g(x_1))$.

Η εφαπτομένη της Cg στο Μ είναι:

$$y - g(x_1) = g'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y = g'(x_1)x + g(x_1) - g'(x_1)\cdot x_1$$

Έχουμε: $g'(x_1) = -1 \Leftrightarrow -3x_1^2 - 1 = -1 \Leftrightarrow x_1 = 0$

και $g(x_1) - g'(x_1)\cdot x_1 = 2$ που ισχύει για $x_1=0$

Άρα η (ε): y = - x + 2 είναι κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g.

Έστω ότι οι C_f, C_g έχουν κι άλλη κοινή εφαπτομένη στα σημεία $M(x_2,f(x_2))$ και $Λ(x_3,g(x_3))$ αντίστοιχα.

- Η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι:

$$(ε_1): \quad y - f(x_2) = f(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = f'(x_2)x + f(x_2) - f'(x_2)\cdot x_2 \quad (3)$$

- Η εφαπτομένη της C_g στο Λ είναι:

$$(ε_2): \quad y - g(x_3) = g'(x_3)(x - x_3) \Leftrightarrow y = g'(x_3)x + g(x_3) - g'(x_3)\cdot x_3 \quad (4)$$

Για να έχουν κοινή εφαπτομένη πρέπει οι $(ε_1)$ και $(ε_2)$ να ταυτίζονται, οπότε από (3), (4) έχουμε:

$$f'(x_2) = g'(x_3) \quad (5)$$

και $f(x_2) - f'(x_2)\cdot x_2 = g'(x_3)x + g(x_3) - g'(x_3)\cdot x_3 \quad (6)$

$$(5) \Rightarrow \ln(x_2^2 - 2x_2 + 2) + \frac{2(x_2-1)^2}{x_2^2 - 2x_2 + 2} - 1 = -3x_3^2 - 1 \Leftrightarrow \ln(x_2^2 - 2x_2 + 2) + \frac{2(x_2-1)^2}{x_2^2 - 2x_2 + 2} = -3x_3^2$$

Ισχύει μόνο για $x_2=1$ και $x_3=0$, διότι $\ln(x_2^2 - 2x_2 + 2) + \dfrac{2(x_2-1)^2}{x_2^2 - 2x_2 + 2} \geq 0$ από Δ3(i) με την

ισότητα να ισχύει μόνο για $x_2=1$, δηλαδή για το σημείο Α(1,1) της C_f

και $-3x_3^2 \leq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x_3=0$, δηλαδή για το σημείο Β(0,1) της C_g.

Άρα η (ε): y = - x + 2 είναι η μοναδική κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g.