ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ (11/06/2018)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. σελ. 99 σχολ. βιβλίου

Α2. α. Ψ, β. σελ. 35 σχολ. βιβλίου

Α3. σελ. 216 σχολ.βιβλίου

Α4. α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

$$f(x)=x-\frac{4}{x^2},\quad x\neq 0$$

Β1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ και στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα πολυωνυμικής και ρητής.

$$f'(x)=1+\frac{8x}{x^4}=1+\frac{8}{x^3}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 1+\frac{8}{x^3}=0\Leftrightarrow x^3=-8\Leftrightarrow x=-2$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow \frac{8}{x^3}+1>0\Leftrightarrow \frac{8+x^3}{x^3}>0\Leftrightarrow x^3\left(8+x^3\right)>0$$

$$x=0\qquad x=-2$$

x	$-\infty$ -2	0	$+\infty$
$8+x^3$	$-$	$+$	$+$
x^3	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

άρα ο πίνακας μονοτονίας της f είναι ως εξής:

x	$-\infty$ -2	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Επομένως, η f είναι γνησίως γνησίως στα $(-\infty,-2)$ και $(0,+\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $(-2,0)$ και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-2)=-3$ στη θέση $x_0=-2$.

Β2. $f''(x)=-\dfrac{8\cdot 3x^2}{x^6}=-\dfrac{24}{x^4}<0$

άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0)$ και στο $(0,+\infty)$ και δεν έχει σημεία καμπής.

B3. Κατακόρυφες ασύμπτωτες:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x-\dfrac{4}{x^2}\right) = -\infty$

  αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{4}{x^2}\right) = -\infty$

  διότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2} = +\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0 \text{ και } x^2 > 0\right)$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(x-\dfrac{4}{x^2}\right) = -\infty$

Άρα η x=0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

Πλάγιες/οριζόντιες ασύμπτωτες:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{4}{x^3}\right) = 1$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x^3} = 0$ Άρα λ=1

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\dfrac{4}{x^3}-x\right) = 0$ δηλ. β=0

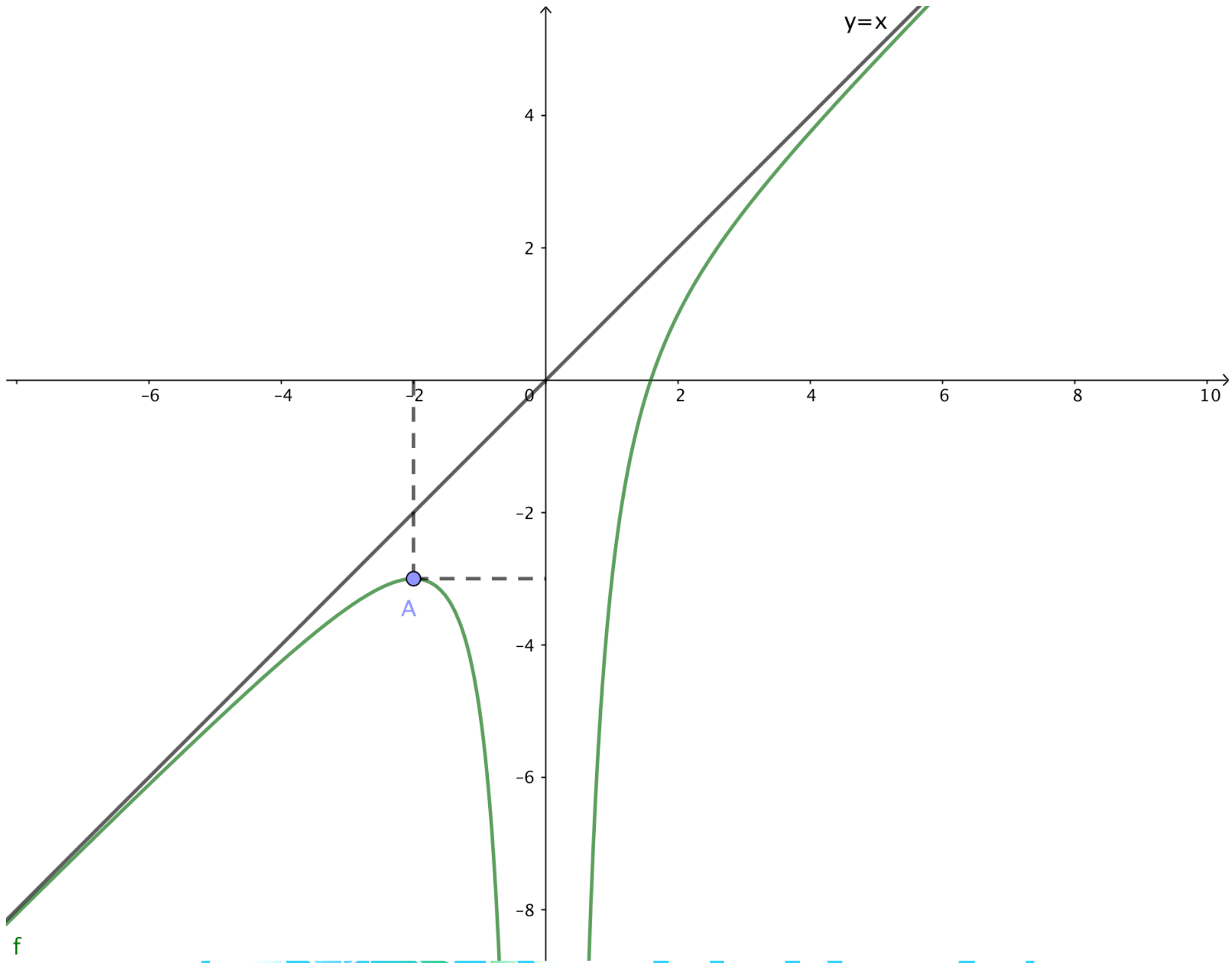
Άρα η y=x ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, όμοια και στο $-\infty$.

B4. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\dfrac{4}{x^2}\right) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\dfrac{4}{x^2}\right) = -\infty$

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα από τα ερωτήματα B1, B2 και B3 προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$ -2	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	–	+
$f''(x)$	–	–	–
f(x)	$-\infty$ ↗ -3	↘ $-\infty$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

Οπότε η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού x (m) είναι περίμετρος του τετραγώνου, είναι $\alpha = \frac{x}{4}$ (m) η πλευρά του, με $0 < x < 8$.

Οπότε το εμβαδόν του τετραγώνου θα είναι: $E_1 = \alpha^2 = \frac{x^2}{16}\ \ m^2$

Η περίμετρος του κύκλου είναι 8-x, άρα $2\pi\rho = 8 - x \Leftrightarrow \rho = \frac{8-x}{2\pi}$

Άρα το εμβαδόν του κύκλου θα είναι:

$$E_2 = \pi\rho^2 = \pi \cdot \left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{\cancel{\pi} \cdot (8-x)^2}{4\pi^{\cancel{2}}} = \frac{(8-x)^2}{4\pi}$$

και έτσι το άθροισμα των εμβαδών τους είναι:

$$E(x) = E_1 + E_2 = \frac{x^2}{16} + \frac{(8-x)^2}{4\pi} = \frac{\pi x^2 + 4(8-x)^2}{16\pi} = = \frac{\pi x^2 + 4\cdot(64 - 16x + x^2)}{16\pi} =$$

$$= \frac{\pi x^2 + 256 - 64x + 4x^2}{16\pi} = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \qquad x \in (0,8)$$

Γ2. $E'(x)=\dfrac{1}{16\pi}\cdot\left[2(\pi+4)x-64\right],\qquad x\in(0,8)$

$E'(x)=0\Leftrightarrow 2(\pi+4)\cdot x-64=0\Leftrightarrow x=\dfrac{32}{\pi+4}$

$E'(x)>0\Leftrightarrow 2(\pi+4)x>64\Leftrightarrow x>\dfrac{32}{\pi+4}$

x	$-\infty$	$\dfrac{32}{\pi+4}$	$+\infty$
E′(x)	$-$		$+$
E(x)	$\searrow$		$\nearrow$

Ο.Ε.

Άρα το E(x) ελαχιστοποιείται όταν $x=\dfrac{32}{\pi+4}$

Τότε $\alpha=\dfrac{\frac{32}{\pi+4}}{4}=\dfrac{8}{\pi+4}$ (m) και η διάμετρος του κύκλου είναι

$$\delta=2\rho=\cancel{2}\cdot\frac{8-\frac{32}{\pi+4}}{\cancel{2}\pi}=\frac{8(\pi+4)-32}{\pi\cdot(\pi+4)}=\frac{8\pi\cancel{+32}\cancel{-32}}{\pi\cdot(\pi+4)}=\frac{8}{\pi+4}=\alpha$$

Γ3. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση E(x)=5 έχει μοναδική λύση στο (0,8).

Η E(x) είναι συνεχής στο (0,8) ως πολυωνυμική.

$\lim\limits_{x\to0^+}E(x)=\dfrac{256}{16\pi}=\dfrac{16}{\pi}>5$ και

$$E\left(\frac{32}{\pi+4}\right)=\frac{(\pi+4)\frac{32^2}{(\pi+4)^2}-64\frac{32}{\pi+4}+256}{16\pi}=\frac{32^2-64\cdot32+256(\pi+4)}{16\pi(\pi+4)}=\frac{256\pi}{16\pi(\pi+4)}=\frac{16}{\pi+4}<5$$

Άρα στο διάστημα $A=\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right]$ η συνάρτηση E παίρνει την τιμή 5 ακριβώς 1 φορά (αφού η E είναι γνησίως φθίνουσα)

Επίσης, $\lim\limits_{x\to8^-}E(x)=\dfrac{(\pi+4)64-64\cdot8+256}{16\pi}=4<5$

Άρα στο διάστημα $A=\left(\dfrac{32}{\pi+4},8\right)$ η συνάρτηση E δεν παίρνει την τιμή 5.

Έτσι, συνολικά έχουμε ότι υπάρχει μοναδικό x (άρα και μοναδικός τρόπος να κόψουμε το σύρμα) ώστε E(x)=5 m^2

ΘΕΜΑ Δ

$f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2, \quad x \in R, \quad \alpha > 1$

Δ1. $f'(x) = 2e^{x-\alpha} - 2x$

$f''(x) = 2e^{x-\alpha} - 2$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 = 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} = 2 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} = 1 \Leftrightarrow x - \alpha = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 > 0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} > 1 \Leftrightarrow x - \alpha > 0 \Leftrightarrow x > \alpha$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$	Σ.Κ.	$\smile$	

Άρα η f έχει μοναδικό σημείο καμπής το $A(\alpha, f(\alpha))$ δηλ. $A(\alpha, 2-\alpha^2)$

Δ2. $f'(x) = 2e^{x-\alpha} - 2x$

f' συνεχής στο $[0,\alpha]$

$f'(\alpha) = 2 - 2\alpha = 2(1-\alpha) < 0$ αφού $\alpha>1$

$f'(0) = 2e^{-\alpha} = \dfrac{2}{e^{\alpha}} > 0$

Από θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_1 \in (0,\alpha)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1) = 0$

Επίσης, στο $(-\infty,\alpha)$ έχουμε $f''(x) < 0$ άρα η f' είναι γν. φθίνουσα.

Έτσι, το x_1 είναι μοναδική λύση, και έχουμε:

- για $x < x_1 \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$
- για $x > x_1 \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

f' συνεχής στο $[\alpha,2\alpha]$

$f'(\alpha) = 2(1-\alpha) < 0$

$f'(2\alpha) = 2e^{2\alpha-\alpha} - 4\alpha = 2e^{\alpha} - 4\alpha = 2(e^{\alpha} - 2\alpha) > 0 \quad (*)$

Από Θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_2 \in (\alpha, 2\alpha)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2) = 0$

Επίσης, στο $(\alpha,+\infty)$ η $f''(x) > 0$ άρα η f' είναι γν. φθίνουσα.

Έτσι, το x_2 είναι μοναδική λύση, και έχουμε:

για $x < x_2 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

για $x > x_2 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

x	$-\infty$	x_1	α	x_2	$+\infty$
f′(x)	+	−	−	+	
f(x)	↗	↘	↘	↗	
		Τ.Μ.		Τ.Ε.	

Έτσι, προκύπτει ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$ ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

(*) Έστω η συνάρτηση h(x) = e^x - 2x, x>1. Είναι h΄(x) = e^x - 2

για x>1 είναι e^x > e ⇔ e^x - 2 > e - 2 ⇔ e^x - 2 > 0

άρα h΄(x) > 0 οπότε η h είναι γν. αύξουσα, έτσι για x>1 είναι h(x) > h(1) = e - 2 > 0

Δ3. Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = f(1)$ έχει λύση $x_0 \in (\alpha, x_2)$

Τότε $f(x_0) = f(1) \quad (1)$

Επειδή η f είναι γν. φθίνουσα στο (α, x_2) είναι και 1-1, άρα η $(1) \Rightarrow x_0 = 1$

Άτοπο, αφού $x_0 \in (\alpha, x_2)$ και α>1

Δ4. Για α=2:

$f(x) = 2e^{x-2} - x^2$

$f'(x) = 2e^{x-2} - 2x$ και

$f(2) = 2 - 4 = -2$

$f'(2) = 2 - 4 = -2$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $(2, f(2))$ είναι:

$$y - f(2) = f'(2) \cdot (x-2)$$
$$y + 2 = -2(x-2)$$
$$y = -2x + 2$$

Από το Δ1 έχουμε ότι στο x=2 η C_f έχει σημείο καμπής και για $x \in [2,3]$ η C_f είναι κυρτή.

Άρα στο $[2,3]$ έχουμε:

$$f(x) \geq -2x+2$$

$$f(x)\sqrt{x-2} \geq (-2x+2)\sqrt{x-2}$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=2.

Άρα $\int_2^3 f(x)\cdot\sqrt{x-2}dx > \int_2^3 (-2x+2)\cdot\sqrt{x-2}dx \quad (A)$

Έστω $I = \int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}dx$

θέτουμε: $u = x-2 \Leftrightarrow x = u+2$ άρα $dx = du$

Για x=2 έχουμε u=0

Για x=3 έχουμε u=1

Άρα $I = \int_0^1 (-2\cdot(u+2)+2)\cdot\sqrt{u}\ du = \int_0^1 (-2u-2)\cdot u^{\frac{1}{2}}\ du =$

$$= \int_0^1 \left(-2\cdot u^{\frac{3}{2}} - 2\cdot u^{\frac{1}{2}}\right)du = \left[-2\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 2\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{4}{5} - \frac{4}{3} = -\frac{32}{5}$$

Οπότε (Α) $\Rightarrow \int_2^3 f(x)\cdot\sqrt{x-2}\,dx > -\frac{32}{15}$