ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ (09/06/2017)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. σελ. 135

Α2. α. ΨΕΥΔΗΣ, β. σελ. 99

Α3. σελ. 73

Α4. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

$f(x)=\ln x$ με $D_f=(0,+\infty)$

$g(x)=\dfrac{x}{1-x}$ με $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$

Β1. $D_{f\circ g}=\{x\in D_g \,/\, g(x)\in D_f\}=\left\{x\neq 1 \,/\, \dfrac{x}{1-x}>0\right\}=$

$=\{x\neq 1/\, x(1-x)>0\}=\{x\neq 1/\, x\in(0,1)\}=(0,1)$

και $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\ln\dfrac{x}{1-x}$

Β2. $h(x)=\ln\dfrac{x}{1-x}$ με $x\in(0,1)$

Η h είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής), ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$g(x)=\dfrac{x}{1-x}$ (ρητή) και $f(x)=\ln x$ (λογαριθμική), με $h'(x)=\left(\ln\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{1}{\frac{x}{1-x}}\cdot\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=$

$$=\frac{1-x}{x}\cdot\frac{1-x-x\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{\cancel{1-x}}{x}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\cancel{2}}}=\frac{1}{x(1-x)}>0$$

διότι $x\in(0,1)$, οπότε x>0 και 1-x>0

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε και 1-1 (δηλαδή αντιστρέφεται).

$h(x)=y \Leftrightarrow \ln\dfrac{x}{1-x}=y \Leftrightarrow \dfrac{x}{1-x}=e^y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=(1-x)\cdot e^y \Leftrightarrow x=e^y-xe^y \Leftrightarrow x+x\cdot e^y=e^y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(1+e^y)=e^y \Leftrightarrow x=\dfrac{e^y}{1+e^y}$, αφού $1+e^y\neq 0$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$

Πρέπει 0<x<1 $\Leftrightarrow 0<\dfrac{e^y}{1+e^y}<1$, που ισχύει για κάθε $y\in\mathbb{R}$

Επομένως, $h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ με $D_{h^{-1}}=\mathbb{R}$

B3. $\varphi(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}, \quad x\in\mathbb{R}$

Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων (e^x: εκθετική, e^x+1 άθροισμα εκθετικής και σταθερής), με

$$\varphi'(x)=\frac{e^x\cdot(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}>0$$

Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

Η φ΄ είναι παραγωγίσιμη, ως πηλίκο παραγωγίσιμων, με

$$\varphi''(x)=\frac{e^x\cdot(e^x+1)^2-e^x\cdot 2(e^x+1)\cdot e^x}{(e^x+1)^4}=\frac{(e^x+1)\cdot\left[e^x\cdot(e^x+1)-2e^{2x}\right]}{(e^x+1)^4}=\frac{e^{2x}+e^x-2e^{2x}}{(e^x+1)^3}=$$

$$=\frac{e^x-e^{2x}}{(e^x+1)^3}=\frac{e^x\cdot(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$$

$\varphi''(x)=0\Leftrightarrow 1-e^x=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$

$\varphi''(x)>0\Leftrightarrow 1-e^x>0\Leftrightarrow x<0$, αφού $e^x>0$ και $(e^x+1)^3>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi''(x)$	+	0	–
$\varphi(x)$	∪	Σ.Κ.	∩

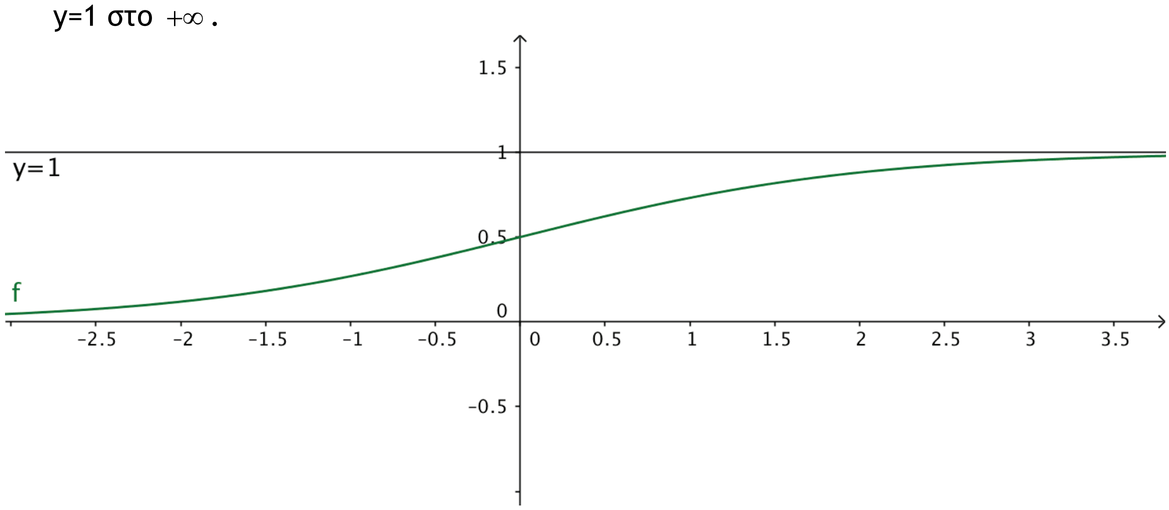
Η φ είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$, κοίλη στο $[0,+\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $A(0,\varphi(0))$ δηλ. το $A\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

B4.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=0$, διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+1)=0+1=1$

  Οπότε η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την y=0 (άξονας x΄x) στο $-\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x)'}{(e^x+1)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$ οπότε η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την y=1 στο $+\infty$.



ΘΕΜΑ Γ

Η συνάρτηση $f(x) = -ημx,\quad x \in [0,π]$ είναι παραγωγίσιμη ως τριγωνομετρική, με

$$f'(x) = (-ημx)' = -συνx$$

Γ1. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f στο οποίο δέχεται εφαπτομένη που διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{π}{2}, -\frac{π}{2}\right)$. Η εξίσωση εφαπτομένης είναι:

$$(ε): y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0) \Leftrightarrow y - ημx_0 = -συνx_0 \cdot (x - x_0)$$

$$A\left(\frac{π}{2}, -\frac{π}{2}\right) \in (ε): \quad -\frac{π}{2} + ημx_0 = -συνx_0 \cdot \left(\frac{π}{2} - x_0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{π}{2} + ημx_0 = -\frac{π}{2}συνx_0 + x_0 \cdot συνx_0 \Leftrightarrow συνx_0\left(\frac{π}{2} - x_0\right) + ημx_0 - \frac{π}{2} = 0$$

Θεωρώ $g(x) = συνx\left(\frac{π}{2} - x\right) + ημx - \frac{π}{2}$. Η g συνεχής στο [0,π].

$g(0) = 0$ και $g(π) = 0$

$g'(x) = -ημx\left(\frac{π}{2} - x\right) - συνx + συνx = -ημx\left(\frac{π}{2} - x\right)$

Για $x \in \left(0, \frac{π}{2}\right)$ είναι: $g'(x) < 0$

Για $x \in \left(\frac{π}{2}, π\right)$ είναι: $g'(x) > 0$

Δηλαδή η g είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in \left(0, \frac{π}{2}\right]$, γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in \left(\frac{π}{2}, π\right)$ και $g'\left(\frac{π}{2}\right) = 0$, οπότε έχει ελάχιστο στο $\frac{π}{2}$ και μέγιστο 0 στο 0 και στο π.

Άρα η g δεν έχει μοναδικές λύσεις τις x=0 και x=π.

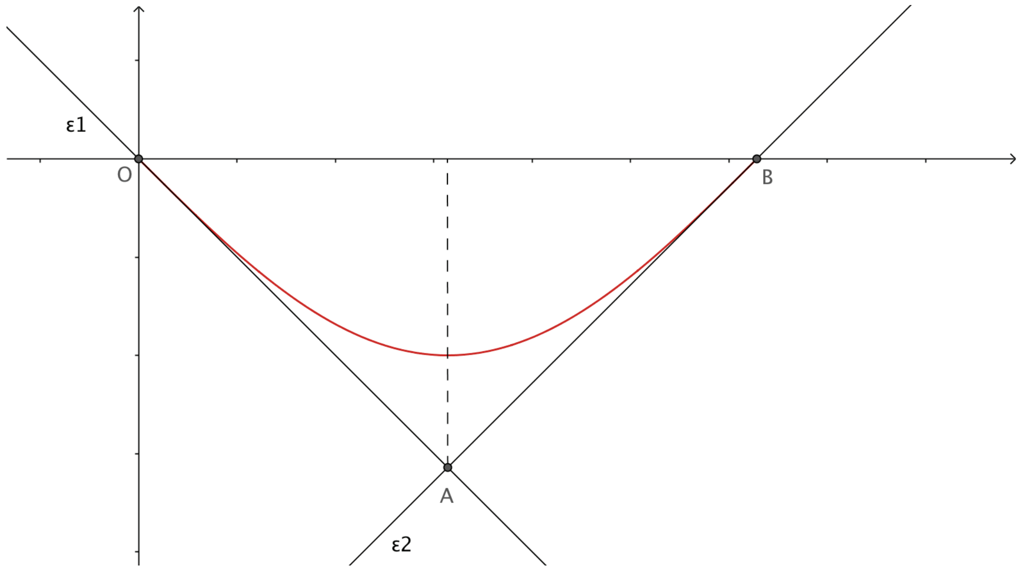
Η εφαπτομένη της C_f στο 0 είναι:

$$ε_1: y - f(0) = f'(0)\cdot(x - 0) \Leftrightarrow y - 0 = -1\cdot x \Leftrightarrow y = -x$$

Η εφαπτομένη της C_f στο π είναι:

$$ε_2: y - f(π) = f'(π)\cdot(x - π) \Leftrightarrow y - 0 = 1\cdot(x - π) \Leftrightarrow y = x - π$$

Γ2.



Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα x΄x είναι:

$$E_2 = \int_0^{\pi} \left(-f(x)\right)dx = \int_0^{\pi} \eta\mu x\,dx = \left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} = -\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\pi} + \boldsymbol{\sigma\upsilon\nu 0} = 2 \text{ τ.μον.}$$

Η ε_1 τέμνει τον x'x στο O(0,0) και η ε_2 τέμνει τον x΄x στο B(π,0).

Το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι $(OAB) = \dfrac{OB \cdot \upsilon}{2} = \dfrac{\pi \cdot \dfrac{\pi}{2}}{2} = \dfrac{\pi^2}{4}$

Άρα $\mathbf{E_1} = \mathbf{(OAB)} - E_2 = \dfrac{\boldsymbol{\pi^2}}{\mathbf{4}} - \mathbf{2}$ τ. μον.

Συνεπώς $\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{\dfrac{\pi^2}{4} - 2}{2} = \dfrac{\pi^2}{8} - 1$

Γ3. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi} = \lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{-\eta\mu x + x}{-\eta\mu x - x + \pi} = L$

Είναι $\lim\limits_{x\to\pi}\left(-\eta\mu x + x\right) = -\eta\mu x + \pi = \pi > 0$ και $\lim\limits_{x\to\pi}\left(-\eta\mu x - x + \pi\right) = -\eta\mu x - \pi + \pi = 0$

Έστω $g(x) = -\eta\mu x - x + \pi$, συνεχής στο $\left[0,\pi\right]$

$g'(x) = -\sigma\upsilon\nu x - 1 = -\left(\sigma\upsilon\nu x + 1\right) \leq 0$

διότι: $-1 \leq \boldsymbol{\sigma\upsilon\nu x} \leq 1 \Leftrightarrow 1 \geq -\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu x} \geq -1$ άρα $-\sigma\upsilon\nu x - 1 \leq 0$

Επομένως η g είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,π]

Οπότε: $0 \leq x \leq \pi \Rightarrow g(0) \geq g(x) \geq g(\pi) \Rightarrow \pi \geq g(x) \geq 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1}{-\eta\mu x - x + \pi} = \lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1}{g(x)} = +\infty$

Συνεπώς $L = +\infty$

Γ4. Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $[0,\pi]$, αφού $\mathbf{f''(x)=\eta\mu x\geq 0}$ για $x\in[0,\pi]$. Έτσι, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένης της, άρα από Γ2 έχουμε:

$$f(x)\geq x-\pi \quad \text{για κάθε } x\in[0,\pi]$$

και η ισότητα ισχύει για x=π.

Για x>0 έχουμε: $\dfrac{f(x)}{x}\geq 1-\dfrac{\pi}{x}$, και η ισότητα ισχύει μόνο για x=π,

οπότε για $x\in[1,e]$ έχουμε: $\dfrac{f(x)}{x}>1-\dfrac{\pi}{x}$ άρα $\int_1^e \dfrac{f(x)}{x}dx>\int_1^e\left(1-\dfrac{\pi}{x}\right)dx \ =\left[\mathbf{x-\pi\ln x}\right]_1^e=$

$$=\mathbf{e-\pi\ln e-(1-\pi\ln 1)}\ =\mathbf{e-\pi-1}$$

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^4}, & x\in[-1,0)\\ e^x\cdot\eta\mu x, & x\in[0,\pi]\end{cases}$$

Δ1. Για $x\in[-1,0)$: η $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών

Για $x\in(0,\pi]$: η $f(x)=e^x\cdot\eta\mu x$ είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt[3]{x^4}=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x\cdot\eta\mu x\right)=e^0\cdot\eta\mu 0=0$

$f(0)=e^0\cdot\eta\mu 0=0$

Δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$, άρα η f συνεχής στο $x_0=0$ οπότε η f συνεχής στο $[1,\pi]$

Για $x\in(0,\pi]$: $f'(x)=e^x\eta\mu x+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x$

$f'(x)=0\Leftrightarrow e^x\left(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)=0\Leftrightarrow \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0$, αφού $e^x>0$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=-\eta\mu x\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

Άρα $x=2\kappa\pi+x+\dfrac{\pi}{2}$ ή $x=2\kappa\pi-x-\dfrac{\pi}{2}$

ΑΔΥΝΑΤΗ

$2x=2\kappa\pi-\dfrac{\pi}{2}$

$x=\kappa\pi-\dfrac{\pi}{4}$

$$0<x\leq\pi\Leftrightarrow 0<\kappa\pi-\frac{\pi}{4}\leq\pi\Leftrightarrow\frac{\pi}{4}<\kappa\pi\leq\frac{5\pi}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{4}<\kappa\leq\frac{5}{4}$$

και $\kappa\in\mathbb{Z}$ άρα κ=1, οπότε $x=\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$

Για $x\in[-1,0)$: $f(x)=|x|^{4/3}=(-x)^{4/3}$, αφού x<0

οπότε $f'(x)=-\dfrac{4}{3}\cdot(-x)^{1/3}=-\dfrac{4}{3}\cdot\sqrt[3]{-x}<0$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{x^4}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{4/3}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)\cdot(-x)^{1/3}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(-(-x)^{1/3}\right)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x\cdot ημx}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(e^x\frac{ημx}{x}\right)=1,\ \text{αφού}\ \lim_{x\to 0^+}e^x=e^0=1\ \text{και}\ \lim_{x\to 0^+}\frac{ημx}{x}=1$$

Άρα δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

Άρα, η συνάρτηση f έχει 2 κρίσιμα σημεία: το $x_1=\frac{3π}{4}$, στο οποίο $f'(x_1)=0$

και το $x_2=0$, στο οποίο η f δεν παραγωγίζεται.

Δ2. Από το ερώτημα Δ1 προκύπτουν τα παρακάτω:

x	-1		0		3π/4		π
f΄(x)		−	‖	+	0	−	
f(x)		↘		↗		↘	
	τ.μ.		τ.ε.		τ.μ.		τ.ε.

- για $x\in[-1,0)$: $f'(x)=-\frac{4}{3}\cdot\sqrt[3]{-x}<0$ άρα η f είναιι γνησίως φθίνουσα
- για $x\in(0,π)$: $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{3π}{4}$
  - στο $\left(0,\frac{3π}{4}\right)$ η $f'(x)$ συνεχής και δε μηδενίζεται, άρα διατηρεί πρόσημο.

    Αφού $f'\left(\frac{π}{2}\right)=e^{\frac{π}{2}}\left(ημ\frac{π}{2}+συν\frac{π}{2}\right)=e^{\frac{π}{2}}>0$ έχουμε $f'(x)>0$ στο $\left(0,\frac{3π}{4}\right)$
  - στο $\left(\frac{3π}{4},π\right]$: $f'(π)=-e^{π}<0$

Άρα η f έχει:

- τοπικό μέγιστο στο -1 το $f(-1)=1$
- τοπικό ελάχιστο στο 0 το $f(0)=0$
- τοπικό μέγιστο στο $\frac{3π}{4}$ το $f\left(\frac{3π}{4}\right)=e^{\frac{3π}{4}}\cdot ημ\frac{3π}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3π}{4}}$
- τοπικό ελάχιστο στο π το $f(π)=e^{π}\cdotημπ=0$

Σύνολο τιμών:

στο [-1,0] η f είναι γν. φθίνουσα και συνεχής, άρα $f([-1,0])=[f(0),f(-1)]=[0,1]$

στο $\left[0,\frac{3π}{4}\right]$ η f είναι γν. αύξουσα και συνεχής, άρα $f\left(\left[0,\frac{3π}{4}\right]\right)=\left[f(0),f\left(\frac{3π}{4}\right)\right]=\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3π}{4}}\right]$

στο $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ η f είναι γν. φθίνουσα και συνεχής, άρα $f\left(\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]\right)=\left[f(\pi),f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$

είναι $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}>1\Leftrightarrow\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}>2\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right)^4>2^4\Leftrightarrow 4e^{3\pi}>16\Leftrightarrow e^{3\pi}>4$, ισχύει

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι $[0,1]\cup\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]=\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$

Δ3. $g(x)=e^{5x}, x\in\mathbb{R}$

$E(\Omega)=\int_0^{\pi}|f(x)-g(x)|dx=\int_0^{\pi}\left|e^x\cdot\eta\mu x-e^{5x}\right|dx=\int_0^{\pi}e^x\cdot\left|\eta\mu x-e^{4x}\right|dx$

Έστω $h(x)=\eta\mu x-e^{4x}$, $x\in[0,\pi]$

$h'(x)=\sigma\upsilon\nu x-4e^{4x}<0$

διότι: $-1\le\sigma\upsilon\nu x\le 1$

και $x\ge 0\Leftrightarrow 4x\ge 0\Leftrightarrow e^{4x}\ge 1\Leftrightarrow 4e^{4x}\ge 4\Leftrightarrow -4e^{4x}\le -4$

άρα: $\sigma\upsilon\nu x\le 1$ και $-4e^{4x}\le -4$, οπότε $\sigma\upsilon\nu x-4e^{4x}\le -3<0$

οπότε: $E(\Omega)=\int_0^{\pi}e^x\cdot\left(e^{4x}-\eta\mu x\right)dx=\int_0^{\pi}\left(e^{5x}-e^x\cdot\eta\mu x\right)dx=\int_0^{\pi}e^{5x}dx-\int_0^{\pi}e^x\eta\mu x dx=\left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^{\pi}-I_1$

όπου $I_1=\int_0^{\pi}e^x\cdot\eta\mu x dx$

$I_1=\int_0^{\pi}\left(e^x\right)'\eta\mu x dx=\left[e^x\cdot\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x dx=$

$=0-\left[e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}e^x\cdot(-\eta\mu x)dx=-e^{\pi}\cdot\sigma\upsilon\nu\pi+e^0\cdot\sigma\upsilon\nu 0-I_1$

άρα $2I_1=e^{\pi}+1\Leftrightarrow I_1=\frac{e^{\pi}+1}{2}$

οπότε: $E(\Omega)=\left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^{\pi}-\frac{e^{\pi}+1}{2}=\frac{e^{5\pi}}{5}-\frac{1}{5}-\frac{e^{\pi}+1}{2}$ τετρ.μονάδες

Δ4. $16e^{-3\pi/4}f(x)-e^{-3\pi/4}(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 16f(x)-(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}\cdot e^{3\pi/4}$

$\Leftrightarrow f(x)-\frac{(4x-3\pi)^2}{16}=\frac{\sqrt{2}e^{3\pi/4}}{2}$

$\Leftrightarrow f(x)=\frac{(4x-3\pi)^2}{16}+f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\quad(1)$

Προφανής λύση της (1) το $x_0=\frac{3\pi}{4}$, αφού: $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\left(4\cdot\frac{3\pi}{4}-3\pi\right)^2}{16}+f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=0+f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \text{ ισχύει}$$

Έστω ότι η (1) έχει και δεύτερη λύση $x_1 \neq \frac{3\pi}{4}$ τότε θα πρέπει:

$$f(x_1)=\frac{(4x_1-3\pi)^2}{16}+f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

Όμως $\frac{(4x_1-3\pi)^2}{16}>0$, οπότε θα ισχύει $f(x_1)>f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ που είναι ΑΤΟΠΟ, διότι το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ είναι το μέγιστο της f.