ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ & ΕΠΑΛ (Β΄)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

(25/05/2015)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 194

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 188

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 259

Α4. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $z = x + yi \quad (x, y \in R)$

$$|z-4| = 2|z-1| \Leftrightarrow |x+yi-4| = 2|x+yi-1| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 2 \cdot \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 = 4 \cdot \left[(x-1)^2 + y^2\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4 \cdot (x^2 - 2x + 1 + y^2) \Leftrightarrow x^2 \cancel{-8x} + 16 + y^2 = 4x^2 \cancel{-8x} + 4 + 4y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4, \quad \text{κύκλος με } K(0,0) \text{ και } \rho = 2$$

Β2. α) Έστω $z_1 = \alpha + \beta i, \quad z_2 = \gamma + \delta i, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$

άρα $\alpha^2 + \beta^2 = 4, \quad \gamma^2 + \delta^2 = 4$

$$w = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = 2 \cdot \left(\frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} + \frac{\gamma + \delta i}{\alpha + \beta i}\right) = 2 \cdot \left[\frac{(\alpha + \beta i)(\gamma - \delta i)}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{(\gamma + \delta i)(\alpha - \beta i)}{\alpha^2 + \beta^2}\right] =$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{\alpha\gamma - \alpha\delta i + \beta\gamma i + \beta\delta}{4} + \frac{\alpha\gamma - \beta\gamma i + \alpha\delta i + \beta\delta}{4}\right] = 2 \cdot \frac{2\alpha\gamma + 2\beta\delta}{4} = \alpha\gamma + \beta\delta \in R$$

Β΄τρόπος: Από Β1 έχουμε $|z_1| = 2 \Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z_1} = 4$ και $|z_2| = 2 \Leftrightarrow z_2 \cdot \overline{z_2} = 4$

$$\text{Άρα} \quad \overline{w} = \overline{\left(\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}\right)} = \frac{2\overline{z_1}}{\overline{z_2}} + \frac{2\overline{z_2}}{\overline{z_1}} = \frac{2\frac{1}{z_1}}{\frac{1}{z_2}} + \frac{2\frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_1}} = 2\frac{z_2}{z_1} + 2\frac{z_1}{z_2} = w, \quad \text{οπότε } w \in R$$

β) *α΄τρόπος:* Αρκεί ν.δ.ο. $|w| \le 4 \Leftrightarrow \left|\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}\right| \le 4 \Leftrightarrow \left|\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}\right| \le 2$

Όμως $\left|\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}\right| \le \left|\frac{z_1}{z_2}\right| + \left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1|} = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} = 2$ (αφού $|z_1| = |z_2| = 2$ από Β1)

Β΄τρόπος: Αρκεί νδο $-4 \le \alpha\gamma + \beta\delta \le 4$ ή $|w| \le 4$

$\overrightarrow{OM_1} = (\alpha, \beta)$

$\overrightarrow{OM_2} = (\gamma, \delta)$

$\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2} = \alpha\gamma + \beta\delta$

$|w| = \left|\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2}\right| \le \left|\overrightarrow{OM_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OM_2}\right| = 2 \cdot 2 = 4$

B3. $w=-4 \Leftrightarrow -4=\dfrac{2z_1}{z_2}+\dfrac{2z_2}{z_1} \Leftrightarrow \dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}=-2 \Leftrightarrow z_1^{\,2}+2z_1z_2+z_2^{\,2}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (z_1+z_2)^2=0 \Leftrightarrow z_1+z_2=0 \Leftrightarrow z_2=-z_1$$

$$\left.\begin{aligned}|z_3-z_1|&=|2iz_1-z_1|=|z_1|\cdot|2i-1|=2\sqrt{5}\\ |z_3-z_2|&=|2iz_1+z_1|=|z_1|\cdot|2i+1|=2\sqrt{5}\end{aligned}\right\}\ |z_3-z_1|=|z_3-z_2| \Rightarrow (\mathrm{A\Gamma})=(\mathrm{B\Gamma})$$

Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές

ΘΕΜΑ Γ

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R ως πηλίκο εκθετικής με πολυωνυμική

Γ1. $f'(x)=\dfrac{e^x\cdot(x^2+1)-e^x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{e^x\cdot(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$, οπότε $f'(1)=0$ και

$f'(x)>0$ στο $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Αφού f συνεχής, έχουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Έτσι, το σύνολο τιμών της είναι: $f\big((-\infty,+\infty)\big)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$

διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x^2+1}=0$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2+1}=0$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2+1}\underset{D'LH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2x}\underset{D'LH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2}=+\infty$

Γ2. $f\big(e^{3-x}\cdot(x^2+1)\big)=\dfrac{e^2}{5}\Leftrightarrow f\big(e^{3-x}\cdot(x^2+1)\big)=f(2)$, f "1−1" αφού είναι γν.αύξουσα

$$\Leftrightarrow e^{3-x}\cdot(x^2+1)=2 \Leftrightarrow \frac{e^3}{e^x}\cdot(x^2+1)=2 \Leftrightarrow \frac{e^3}{2}=\frac{e^x}{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=\frac{e^3}{2}$$

Αφού το $\dfrac{e^3}{2}\in(0,+\infty)$ και η f είναι συνεχής, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in R$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\dfrac{e^3}{2}$ το οποίο είναι μοναδικό, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Γ3. Έστω $h(x)=\int_0^x f(t)dt,\quad x>0$

Η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ άρα η h(x) παραγωγίσιμη, με $h'(x)=f(x)$. Συνεπώς η h είναι συνεχής.

Από Θ.Μ.Τ. για την h στο $[2x,4x]$: υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(2x,4x)$ τέτοιο ώστε

$$h'(\xi)=\frac{h(4x)-h(2x)}{4x-2x}\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{\int_0^{4x}f(t)dt-\int_0^{2x}f(t)dt}{2x}\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{\int_{2x}^{4x}f(t)dt}{2x}\qquad(1)$$

Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για $\xi<4x$ έχουμε:

$$f(\xi)<f(4x)\ \overset{(1)}{\Leftrightarrow}\ \frac{\int_{2x}^{4x}f(t)dt}{2x}<f(4x)\ \overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ \int_{2x}^{4x}f(t)dt<2x\cdot f(4x)$$

Γ4. $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\cdot\displaystyle\int_{2x}^{4x} f(t)dt\,, & x>0\\ 2\,, & x=0\end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x}\overset{d'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(4x)\cdot 4-f(2x)\cdot 2}{1}=\dfrac{1\cdot 4-1\cdot 2}{1}=2=g(0)$ άρα g συνεχής στο $x_0=0$

  Επίσης, $\int_{2x}^{4x} f(t)dt=\int_{c}^{4x} f(t)dt-\int_{c}^{2x} f(t)dt$ παραγωγίσιμη ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων (f συνεχής, 2x συνεχής άρα $\int_{c}^{2x} f(t)dt$ παραγωγίσιμη – f συνεχής, 4x συνεχής άρα $\int_{c}^{4x} f(t)dt$ παραγωγίσιμη). Άρα g συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμης (άρα και συνεχούς) συνάρτησης με τη x (που είναι συνεχής ως πολυωνυμική).

  Άρα η g είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$

- Για x>0, η g(x) γράφεται: $g(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\left(\displaystyle\int_{0}^{4x} g(t)dt-\int_{0}^{2x} f(t)dt\right)=\dfrac{1}{x}\cdot\left(h(4x)-h(2x)\right)=\dfrac{h(4x)-h(2x)}{x}$

η οποία είναι παραγωγίσιμη, ως πηλίκο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων h(4x)-h(2x) (οι h(4x) και h(2x) παραγωγίσιμες ως συνθέσεις της παραγωγίσιμης h με τις πολυωνυμικές 4x και 2x, αντίστοιχα) και x (πολυωνυμική). Άρα

$$g'(x)=\frac{\left(4h'(4x)-2h'(2x)\right)x-\left(h(4x)-h(2x)\right)}{x^2}=\frac{4x\cdot f(4x)-2xf(2x)-\displaystyle\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x^2}$$

αρκεί να δείξουμε ότι $4xf(4x)-2xf(2x)-\displaystyle\int_{2x}^{4x} f(t)dt>0$ για $x>0$

Έχουμε $4x\cdot f(4x)-2xf(2x)-\displaystyle\int_{2x}^{4x} f(t)dt=$

$$=2xf(4x)-2xf(2x)+2xf(4x)-\int_{2x}^{4x} f(t)dt=2x\left(f(4x)-f(2x)\right)+2xf(4x)-\int_{2x}^{4x} f(t)dt>0$$

διότι 2x>0 και $2x<4x\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(2x)<f(4x)\Leftrightarrow f(4x)-f(2x)>0$ άρα $2x\left(f(4x)-f(2x)\right)>0$

και $2xf(4x)>\displaystyle\int_{2x}^{4x} f(t)dt$ από το ερώτημα Γ3, άρα $2xf(4x)-\displaystyle\int_{2x}^{4x} f(t)dt>0$

Επομένως, $g'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και g συνεχής στο $[0,+\infty)$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x)\left[e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right]=2\ \Leftrightarrow f'(x)\cdot e^{f(x)}+f'(x)\cdot e^{-f(x)}=2\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}-e^{-f(x)}\right)'=(2x)'$

Άρα $\quad e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c \quad (1)$

για $\quad x = 0 : e^{f(0)} - e^{-f(0)} = 2 \cdot 0 + c \Leftrightarrow 1 - 1 = c \Leftrightarrow c = 0$

Άρα $\quad (1) \Rightarrow e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x \Leftrightarrow e^{f(x)} - \dfrac{1}{e^{f(x)}} = 2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)^2 - 1 = 2x \cdot e^{f(x)} \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)^2 - 2x\left(e^{f(x)}\right) - 1 = 0 \qquad (2)$

$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad$ με $\quad D_f = R$

(*) *α΄τρόπος:*

$$(2) \Rightarrow \left(e^{f(x)}\right)^2 - 2x \cdot \left(e^{f(x)}\right) + x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)} - x\right)^2 = x^2 + 1$$

άρα $\quad e^{f(x)} - x = \sqrt{x^2+1} \quad$ ή $\quad e^{f(x)} - x = -\sqrt{x^2+1}$

$e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2+1} \qquad$ ή $\qquad e^{f(x)} = x - \sqrt{x^2+1}$

$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad$ για $\quad x = 0 : e^{f(0)} = -1 \Leftrightarrow 1 = -1 \quad$ ΑΔΥΝΑΤΗ

Β΄ τρόπος:

Θέτω $\; y^2 - 2xy - 1 = 0, \quad \Delta = 4x^2 + 4 \quad$ άρα $\quad y = \dfrac{2x \pm 2\sqrt{x^2+1}}{2} \Leftrightarrow \; \Leftrightarrow y = x \pm \sqrt{x^2+1}$

άρα $\quad e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2+1} \quad$ ή $\quad e^{f(x)} = x - \sqrt{x^2+1}$

Όμως $\quad x - \sqrt{x^2+1} < 0 \quad \forall x \in R \quad$ και $\quad x + \sqrt{x^2+1} > 0 \quad \forall x \in R$

Άρα $\quad$ δεκτή $\quad$ η $\quad e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2+1}$

Δ2. α) $f'(x) = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} \cdot \cancel{2}x\right) = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \dfrac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$f''(x) = \left(\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\dfrac{1}{\cancel{2}} \cdot \left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \cancel{2}x = -x \cdot \left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	○	$-$
$f(x)$	$\cup$		$\cap$

Σ.Κ.
f(0)=0

Άρα f $\quad$ κυρτή $\quad$ στο $\quad (-\infty, 0)$, $\quad$ κοίλη $\quad$ στο $\quad (0, +\infty)$ και έχει ένα σημείο καμπής Σ(0,0).

β) $E(\Omega) = \displaystyle\int_0^1 \left|f(x) - x\right| dx = \int_0^1 \left|\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) - x\right| dx \overset{(*)}{=}$

$$= \int_0^1 \left(x - \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right) dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 (x)' \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) dx =$$

$$\overset{(\Delta 2\alpha)}{=} \frac{1}{2} - 0 - \left[x \cdot \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 + \int_0^1 x \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{1}{2} - \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) + \int_0^1 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} - \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) + \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right) = \frac{-1}{2} + \sqrt{2} - \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) \quad \text{τετρ.μονάδες}$$

(*) Ισχύει $f(x) \le x$ για κάθε $x \ge 0$

Απόδειξη: *α΄τρόπος:* Έστω $g(x) = f(x) - x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) - x$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{1-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} < 0 \quad \text{για } x \ne 0$$

$$\left(\text{αφού} \quad 1-\sqrt{x^2+1} < 0 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow 1 < x^2+1 \quad \text{ισχύει} \quad \text{για} \quad x \ne 0\right)$$

g συνεχής στο R άρα g γνησίως φθίνουσα

για $x \ge 0 \Rightarrow g(x) \le g(0) \Rightarrow g(x) \le 0 \Rightarrow f(x) \le x$

β΄τρόπος: Η εφαπτομένη της C_f στο (0,0) είναι:

$$(\varepsilon): \quad y - f(0) = f'(0)\cdot(x-0) \Leftrightarrow y = x$$

και η f είναι κοίλη για x>0, άρα η C_f βρίσκεται κάτω απ΄ την (ε), δηλαδή

$f(x) \le x$ (η ισότητα ισχύει μόνο για x=0).

Δ3. Είναι $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$ για κάθε $x \in R$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για x>0 είναι

f(x)>f(0) ⇔ f(x)>0. Έτσι, έχουμε ln|f(x)| = lnf(x) και το όριο γράφεται:

$$\ell = \lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1\right)\ln f(x)\right]$$ και είναι της μορφής $0\cdot(-\infty)$. Έτσι, έχουμε

$$\ell = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{\dfrac{1}{\ln f(x)}} \overset{d'H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f^2(x)}{-\dfrac{1}{\ln^2 f(x)}\cdot f'(x)} = \lim_{x\to 0^+}\left[-\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot\left[f(x)\cdot\ln f(x)\right]^2}{f'(x)}\right] = -\frac{1\cdot 0}{1} = 0$$

διότι:

- $$\lim_{x\to 0^+}\left[f(x)\cdot\ln f(x)\right] = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln f(x)}{\dfrac{1}{f(x)}} \overset{d'H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{f(x)}\cdot\cancel{f'(x)}}{f^{-2}(x)\cdot\cancel{f'(x)}} = \lim_{x\to 0^+}\left(-f(x)\right) = -f(0) = 0$$
- $$\lim_{x\to 0^+} e^{\int_0^x f^2(t)dt} = e^0 = 1$$
- $$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

β΄τρόπος:

Έστω $F(x) = e^{\int_0^x f^2(t)dt}$ παραγωγίσιμη με $F'(x) = f^2(x)\cdot F(x)$

$$l = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\cdot x\ln f(x)\right] = 0\cdot 0 = 0, \quad \text{διότι} \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = F'(0) = 0 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x\ln f(x)\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln f(x)}{\dfrac{1}{x}} \overset{d'H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{f'(x)}{f(x)}}{-\dfrac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2}{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \ldots = 0$$

Δ4. Έστω $h(x)=(x-2)\cdot\left(1-3\int_0^{x-2} f\left(t^2\right)dt\right)+(x-3)\cdot\left(8-3\int_0^{x} f^2(t)dt\right)$

Η $h(x)$ είναι συνεχής στο [2,3] ως πράξεις μεταξύ των εξής συνεχών συναρτήσεων:

- $x-2$ και $x-3$ πολυωνυμικές
- $\int_0^{x-2} f\left(t^2\right)dt$ συνεχής ως παραγωγίσιμη αφού $f(t^2)$ συνεχής (σύνθεση της f με την πολυωνυμική t^2) και x - 2 συνεχής
- $\int_0^{x} f^2(t)dt$ συνεχής ως παραγωγίσιμη αφού f(t) συνεχής (άρα και f^2 συνεχής) και x συνεχής

$$h(2)=-8+3\int_0^2 f^2(t)dt$$

$$h(3)=1-3\int_0^1 f\left(t^2\right)dt$$

Όμως $f(x)\le x$ (η ισότητα ισχύει μόνο για x=0) από το Δ2. Επομένως:

$f^2(x)<x^2$ άρα $\int_0^2 f^2(x)dx<\int_0^2 x^2dx \Leftrightarrow \int_0^2 f^2(x)\,dx<\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 \Leftrightarrow \int_0^2 f^2(x)dx<\frac{8}{3}\Leftrightarrow h(2)<0$

Επίσης, από τη σχέση $f(x)<x$ θέτοντας όπου x το x^2 έχουμε:

$f(x^2)<x^2$ άρα $\int_0^1 f(x^2)dx<\int_0^1 x^2dx\Leftrightarrow \int_0^1 f\left(x^2\right)dx<\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1\Leftrightarrow \int_0^1 f(x^2)dx<\frac{1}{3}\Leftrightarrow h(3)>0$

Άρα, $h(2)\cdot h(3)<0$ οπότε από θεώρημα Bolzano, η εξίσωση h(x)=0 έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (2,3)