ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ & ΕΠΑΛ (Β΄)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ *(20/05/2015)*

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. σχολ.σελ.31

Α2. σχολ.σελ.22 «Αν το όριο … υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός…» *(μέχρι και τον τύπο στο πλαίσιο)*

Α3. σχολ.σελ.87

Α4. i) Λ ii) Σ iii) Λ iv) Λ v) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $(3x - 1)(8x^2 - 6x + 1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0$ ή $8x^2 - 6x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \qquad x = \frac{1}{2} \text{ ή } x = \frac{1}{4}$$

ισχύει ότι $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ άρα $P(A \cap B) \subseteq P(A) \subseteq P(A \cup B)$ επομένως

$P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ και $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$

Β2. Έχουμε: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$

Ισχύει ότι $P(A - B) = P(A \cap B')$ άρα, αντίστοιχα, για το ζητούμενο έχουμε:

$$P(A' - B') = P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Δ: ¨πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β¨ είναι:

$$P\left[(A \cap B)'\right] = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Β3. Η πιθανότητα του ενδεχομένου Ε: ¨πραγματοποιείται μόνο ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β¨ είναι:

$P\left[(A - B) \cup (B - A)\right] = P(A - B) + P(A - B) =$ *(απλός προσθετικός νόμος, αφού Α-Β, Β-Α ασυμβίβαστα)*

$$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{5}{12} - \frac{2}{4} = \frac{4}{12} + \frac{5}{12} - \frac{6}{12} = \frac{1}{4}$$

Β4. Από την εξίσωση $9x^2 - 3x - 2 = 0$ παίρνουμε τις λύσεις $x = \frac{2}{3}$ ή $x = -\frac{1}{3}$

Προφανώς είναι $P(\Gamma) = \frac{2}{3}$, αφού είναι $0 \le P(\Gamma) \le 1$.

Αν τα ενδεχόμενα Β, Γ ήταν ασυμβίβαστα, τότε θα ίσχυε:

$$P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma) = \frac{5}{12} + \frac{2}{3} = \frac{13}{12} > 1 \quad \text{ΑΤΟΠΟ}$$

Άρα τα ενδεχόμενα Β και Γ δεν είναι ασυμβίβαστα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f_1\%=10$, $f_5\%=30$ και $\alpha_3 = 360^\circ f_3 \Leftrightarrow 108^\circ = 360^\circ f_3 \Leftrightarrow f_3 = 0,3$ ή $f_3\% = 30\%$

$$f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% + f_5\% = 100 \Leftrightarrow 10 + f_2\% + 30 + f_4\% + 30 = 100 \Leftrightarrow f_2\% + f_4\% = 30\%$$

$$f_2 + f_4 = 0,3 \Leftrightarrow f_4 = 0,3 - f_2$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{5} x_i f_i \Leftrightarrow 14 = 9 \cdot 0,1 + 11 \cdot f_2 + 13 \cdot 0,3 + 15 \cdot f_4 + 17 \cdot 0,3 \Leftrightarrow 14 = 11\, f_2 + 15\,(0,3 - f_2) + 9,9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14 = 11\, f_2 + 15 \cdot 0,3 - 15\, f_2 + 9,9 \Leftrightarrow 0,4 = 4\, f_2 \Leftrightarrow f_2 = 0,1$$

$f_4 = 0,3 - 0,1 = 0,2$

Γ2.

κλάσεις	x_i	f_i	$f_i\%$
[8-10)	9	0,1	10
[10-12)	11	0,1	10
[12-14)	13	0,3	30
[14-16)	15	0,2	20
[16-18)	17	0,3	30
Σύνολο		1	100

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{5} x_i^2 \nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2}{\nu}\right\} = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 \frac{\nu_i}{\nu} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2}{\nu^2} = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 f_i - \bar{x}^2 =$$

$$= 9^2\, 0,1 + 11^2\, 0,1 + 13^2\, 0,3 + 15^2\, 0,2 + 17^2\, 0,3 - 14^2 = 6,6 \quad \text{άρα} \quad s = \sqrt{6,6} \simeq 2,57$$

Οπότε $CV = \frac{s}{\bar{x}} \simeq \frac{2,57}{14} \simeq 0,1836 > 0,1$ δεν είναι ομοιογενές

Γ3. $\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{5} x_i \nu_i \Leftrightarrow \nu \cdot \bar{x} = \sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i + x_5 \nu_5 \Leftrightarrow 14\nu = 1780 + 17 \cdot \nu_5 \qquad (1)$

$$f_5 = \frac{\nu_5}{\nu} \Leftrightarrow \nu_5 = \nu \cdot 0,3$$

Άρα, από (1), έχουμε: $14\nu = 1780 + 17 \cdot \nu \cdot 0,3 \Leftrightarrow 8,9\nu = 1780 \Leftrightarrow \nu = 200$

Γ4. *ασκ.Β4/σελ.103 σχολ.βιβλίου*

$$\left.\begin{array}{l}\text{Έστω } y_i = \alpha_i - \bar{\alpha},\ i=1,2,3,4,5 \\ \text{Τότε } \bar{y} = \bar{\alpha} - \bar{\alpha} = 0 \text{ και } s_y = s_\alpha. \end{array}\right\} \quad \beta_i = \frac{1}{s_\alpha} y_i,\ i=1,2,3,4,5$$

Άρα $\bar{\beta} = \frac{1}{s_\alpha}\bar{y} = 0$ & $s_\beta = \frac{1}{s_\alpha} s_y = \frac{1}{s_\alpha} s_\alpha = 1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η γωνία ΔΑΒ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο και ορθή, άρα η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου. Από πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ:

$(ΒΓ)^2 = (ΒΔ)^2 - (ΑΒ)^2 = (2ρ)^2 - x^2 = 10^2 - x^2$ Άρα $(ΒΓ) = \sqrt{100 - x^2}$

Έτσι, το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι: $(ΑΒΓΔ) = (ΑΒ)\cdot(ΒΓ) = x\cdot\sqrt{100 - x^2}$

άρα $f(x) = x\cdot\sqrt{100 - x^2}$ με $x>0$ και $100 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 100 \Leftrightarrow -10<x<10$

δηλαδή $0 < x < 10$

Δ2. Η συνάρτηση $f(x) = x\cdot\sqrt{100 - x^2}$ είναι παραγωγίσιμη στο (0,10) ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων: της πολυωνυμικής x και της σύνθεσης της $\sqrt{x}$ με την πολυωνυμική $100 - x^2$.

$$f'(x) = \sqrt{100 - x^2} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{100 - x^2}}\cdot(-2x) = \sqrt{100 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 50 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{50}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 50 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0 < x < \sqrt{50}$

x	0	$\sqrt{50}$	10
f΄(x)	+	0	−
f(x)	↗		↘

Άρα το εμβαδόν γίνεται μέγιστο για $x = \sqrt{50}$,

δηλαδή όταν έχει πλευρές $(ΑΒ) = \sqrt{50}$ και

$(ΒΓ) = \sqrt{100 - 50} = \sqrt{50}$, επομένως, όταν είναι τετράγωνο.

Δ3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1+x) - f(1)}{98x} \overset{(*)}{=} \frac{1}{98}f'(1) = \frac{1}{98}\frac{98}{\sqrt{99}} = \frac{1}{\sqrt{99}}$

$$(*)\quad f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

Β΄τρόπος: το όριο υπολογίζεται και με συζυγή παράσταση και … πράξεις

Δ4. $A - B \subseteq A \Rightarrow P(A - B) \le P(A)$

Όμως $P(A-B), P(A) \in (0,1]$ και f γν.αύξουσα στο (0,1], οπότε $f\left(P(A-B)\right) \le f\left(P(A)\right)$ δηλαδή

$$P(A-B)\cdot\sqrt{100-P^2(A-B)} \le P(A)\cdot\sqrt{100-P^2(A)} \Leftrightarrow \frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}} \le \frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}} \quad (1)$$

Οι αριθμοί και βρίσκονται στο διάστημα (0,1] όπου η f είναι γν.αύξουσα, διότι:

$\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}} < 1 \Leftrightarrow P(A-B) < \sqrt{100-P^2(A)} < \sqrt{100} = 10 < 1$, που ισχύει

και $\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}} < 1 \Leftrightarrow P(A) < \sqrt{100-P^2(A-B)} < \sqrt{100} = 10 < 1$, που ισχύει.

Έτσι, από τη σχέση (1), προκύπτει: $f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\right) \le f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\right)$