ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ & ΕΠΑΛ (Β΄)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

(02/06/2014)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 251

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 273

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 150

Α4. α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $2|z|^2+\left(z+\bar{z}\right)i-4-2i=0$ (1)

Θέτοντας z=x+yi, x,y $\in$R έχουμε: $2\left(x^2+y^2\right)+2xi-4-2i=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2+(x-1)i=0$

$$\begin{cases} x^2+y^2-2=0 \\ x-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2=1 \\ x=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\pm 1 \\ x=1 \end{cases}$$

άρα z_1 = 1+i ή z_2 = 1 - i

Β2. $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{1^2-i^2}=\dfrac{1+2i-1}{2}=i$

άρα $w=3\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{39}=3\cdot i^{39}=3\cdot i^{4\cdot 9+3}=3\cdot\left(i^4\right)^9\cdot i^3=3\cdot 1\cdot(-i)=-3i$

Β3. $|u+w|=|4z_1-z_2-i| \Leftrightarrow |u-3i|=|4(1+i)-(1-i)-i| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |u-3i|=|4+4i-1+i-i| \Leftrightarrow |u-3i|=|3+4i| \Leftrightarrow |u-3i|=5$

άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των εικόνων των μιγαδικών u είναι ο κύκλος με κέντρο Κ(0,3) και ακτίνα ρ=5

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η h έχει πεδίο ορισμού το R και είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων {διότι η x είναι συνεχής ως πολυωνυμική και η $\ell n\left(e^x+1\right)$ ως σύνθεση εκθετικής με λογαριθμική.

$$h'(x)=1-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}>0 \quad \text{άρα h γν. αύξουσα}$$

$$h''(x)=\frac{-e^x}{\left(e^x+1\right)^2}<0 \quad \text{άρα η h είναι κοίλη (και η h΄ γν.φθίνουσα)}$$

Γ2. $e^{h(2h'(x))}<\frac{e}{e+1}\Leftrightarrow h\left(2h'(x)\right)<\ell n\frac{e}{e+1}\Leftrightarrow h\left(2h'(x)\right)<h(1)\overset{(*)}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow 2h'(x)<1\Leftrightarrow h'(x)<\frac{1}{2}\Leftrightarrow h'(x)<h'(0)\overset{(**)}{\Leftrightarrow}x>0$$

(*) η h είναι γν.αύξουσα οπότε είναι 1-1 και η αντίστροφή της έχει το ίδιο είδος μονοτονίας

(+απόδειξη:Βλ.φυλλάδιο ΑΡΤΙΟ τεύχος 1ο σελ.83)

(**) η h΄ είναι γν.φθίνουσα οπότε είναι 1-1 και η αντίστροφή της έχει το ίδιο είδος μονοτονίας

(+απόδειξη:Βλ.φυλλάδιο ΑΡΤΙΟ τεύχος 1ο σελ.83)

Γ3. $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ell n\frac{e^x}{e^x+1}=0$, διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\ell n\frac{e^x}{e^{x+1}}\underset{\frac{e^x}{e^x+1}=u}{=}\lim\limits_{u\to1}\ell nu=\ell n1=0$

άρα y=0 (άξονας x΄x) οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\ln(e^x+1)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left[1-\frac{\ln(e^x+1)}{x}\right]\overset{(*)}{=}1-0=1=\lambda$$

$$(*)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(e^x+1)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot\ln\left(e^x+1\right)\right]=0$$

διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(e^x+1\right)\right]\overset{u=e^x+1}{=}\lim\limits_{u\to0}\left(\ln u\right)=0$ (I)

και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[h(x)-\lambda(x)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\ln(e^x+1)-x\right)\overset{(I)}{=}0=\beta$$

Άρα η y=x είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$

Γ4. $\varphi(x)=e^x\left(h(x)+\ell n2\right),\quad x\in R$

$$\varphi(x)=e^x\left(\ln\frac{e^x}{e^x+1}+\ln2\right)=e^x\cdot\ln\frac{2e^x}{e^x+1}$$

$$\varphi(x)=0\Leftrightarrow\ln\frac{2e^x}{e^x+1}=0\Leftrightarrow\frac{2e^x}{e^x+1}=1\Leftrightarrow2e^x=e^x+1\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$$

για $x\in[0,1]$ είναι $\frac{2e^x}{e^x+1}\geq1$ άρα $\ln\frac{2e^x}{e^x+1}\geq0$ οπότε $\varphi(x)\geq0$.

Άρα $E(\Omega)=\int_0^1\varphi(x)dx=\int_0^1\left(e^xh(x)+e^x\ell n2\right)dx=\int_0^1\left(e^x\left(x-\ell n(e^x+1)\right)+e^x\ell n2\right)dx=$

$$= \int_0^1 e^x\left(x-\ell n(e^x+1)\right)dx + \int_0^1 \left(e^x \ell n2\right)dx = \int_0^1 \left(e^x\right)'\left(x-\ell n(e^x+1)\right)dx + \left[e^x \ell n2\right]_0^1 =$$

$$= \left[e^x\left(x-\ell n(e^x+1)\right)\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\left(1-\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx + \left(e\ell n2-\ell n2\right) =$$

$$= e\left(1-\ell n(e+1)\right) - 1\left(0-\ell n2\right) - \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx + (e-1)\ell n2 =$$

$$= e - e\ell n(e+1) + \ell n2 - \left[\ell n(e^x+1)\right]_0^1 + e\,\ell n2 - \ell n2 =$$

$$= e - e\ell n(e+1) - (\ell n(e+1) - \ell n2) + e\,\ell n2 = e - e\ell n(e+1) - \ell n(e+1) + \ell n2 + e\,\ell n2 =$$

$$= e - e\ell n(e+1) + \ell n(e+1) + 1 - \ell n2 + e\,\ell n2 = e + (e+1)\,\ell n\frac{2}{e+1}$$ τετρ.μονάδες

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1} = 1 = f(0)$ άρα η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$

Για $x \neq 0$: $f'(x) = \left(\frac{e^x-1}{x}\right)' = \frac{e^x\cdot x-(e^x-1)}{x^2} = \frac{e^x\cdot x - e^x+1}{x^2}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x\cdot x - e^x + 1$ με $g'(x) = e^x\cdot x + e^x - e^x = x\cdot e^x$

- για $x<0$ είναι $g'(x)<0$ δηλαδή η g είναι γνησίως φθίνουσα άρα $g(x)>g(0) \Leftrightarrow e^x\cdot x + e^x - e^x > 0$

  άρα $f'(x)>0$ οπότε η f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$
- για $x>0$ είναι $g'(x)>0$ δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα άρα $g(x)>g(0) \Leftrightarrow e^x\cdot x + e^x - e^x > 0$

  άρα $f'(x)>0$ οπότε η f γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Αφού f συνεχής στο $x_0=0$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

Δ2. Η f είναι κυρτή άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα

α) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$ άρα $f'(0) = \frac{1}{2}$

Συνεπώς η εξίσωση $\int_1^{2f'(x)} f(u)du = 0$ επαληθεύεται για x=0

Έστω $h(x) = \int_1^x f(u)du$

αφού η f είναι συνεχής, η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = f(x)$

και είναι $f(x)>0$ για $x>1$, διότι $x>1 \Leftrightarrow e^x>e^0 \Leftrightarrow e^x-1>0 \Leftrightarrow \frac{e^x-1}{x}>0$

άρα $h'(x)>0$ δηλαδή η h είναι γνησίως αύξουσα

Έτσι, $\int_1^{2f'(x)} f(u)du = h\left(2f'(x)\right)$

Για $x_1<x_2 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x_1) < f'(x_2) \overset{h\uparrow}{\Rightarrow} h(f'(x_1)) < h(f'(x_2))$ δηλαδή η $h\left(2f'(x)\right)$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα η λύση $x=0$ είναι μοναδική

β) Ζητείται σημείο $M(x(t_1),y(t_1))$ για το οποίο ισχύει $x'(t_1)=2y'(t_1)$ όπου $y(t)=f(x(t))$

$y'(t)=f'(x(t))\cdot x'(t)$

Για $t=t_1$: $y'(t_1)=f'(x(t_1))\cdot x'(t_1) \Leftrightarrow y'(t_1)=f'(x(t_1))\cdot 2y'(t_1) \overset{(*)}{\Leftrightarrow} 1 = 2f'(x(t_1))$ (A)

(*) αφού $x'(t_1) > 0 \Rightarrow y'(t_1) > 0$

Άρα (A) $\Leftrightarrow f'(x(t_1)) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow f'(x(t_1)) = f'(0) \Leftrightarrow x(t_1) = 0$, αφού f γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1

Τότε $y(t_1)=f(x(t_1))=f(0)=1$, άρα το ζητούμενο σημείο είναι το M(0,1).

Δ3. Είναι $g(x)=(xf(x) + 1 - e)^2(x - 2)^2 = (e^x - e)^2(x - 2)^2$

και $g'(x) = 2(x - 2)(e^x - e)(xe^x - e^x - e)$

Έχουμε $g'(1)=0$ και $g'(2)=0$

Έστω $\varphi(x)= xe^x - e^x - e$. Η φ είναι συνεχής στο [1,2] και $g(1)\cdot g(2)=-e\cdot(e^2-e) < 0$ άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $\varphi(\xi)=0$

Επίσης, $\varphi'(x)=e^x + x\cdot e^x - ex = xe^x$

για $x>0$ είναι $\varphi'(x)>0$ οπότε η φ είναι γνησίως αύξουσα για $x>0$ άρα για $x>\xi \Leftrightarrow \varphi(x)>\varphi(\xi) \Leftrightarrow \varphi(x)>0$

Έτσι, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας προσήμων για τη $g'(x)$:

x	$-\infty$ 1	ξ	2	$+\infty$
$x - 2$	-	-	-	+
$e^x - e$	-	+	+	+
$\varphi(x)$	-	-	+	+
$g'(x)$	-	+	-	+

Επομένως, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας για τη μονοτονία και τα ακρότατα της g:

x	$-\infty$ 1	ξ	2	$+\infty$
$g'(x)$	-	+	-	+
$g(x)$	↘	↗	↘	↗

Άρα η g έχει 2 τοπικά ελάχιστα και ένα τοπικό μέγιστο.