ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ & ΕΠΑΛ (Β΄)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ (20/05/2013)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. σχολ.σελ.28

Α2. σχολ.σελ.14

Α3. σχολ.σελ.87

Α4. i) Λ ii) Σ iii) Λ iv) Λ v) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x+1-1}{(x^3+x^2)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x\,\cancel{(x+1)}}{x^2\,\cancel{(x+1)}\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=-\frac{1}{2}$$

Άρα $P(\omega_1)=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

Για τη συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{3}\ln x$ έχουμε: $f'(x)=\frac{1}{3}\ln x+\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\ln x+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(\ln x+1)$

Ο ρυθμός μεταβολής της f, όταν x=1, είναι: $f'(1)=\frac{1}{3}(\ln 1+1)=\frac{1}{3}$

Άρα $P(\omega_3)=\frac{1}{3}$

Β2. $A'=\{\omega_2,\omega_3\}$

$\{\omega_3\}\subseteq A'$ άρα $P(\omega_3)\le P(A')$ δηλαδή $\frac{1}{3}\le P(A')$

Από αξιωματικό ορισμό πιθανότητας,

$P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4)=1$

$\frac{1}{4}+P(\omega_2)+\frac{1}{3}+P(\omega_4)=1$

$P(\omega_2)+P(\omega_4)=\frac{3}{4}-\frac{1}{3}$ (1)

$P(A')=P(\omega_2)+P(\omega_3)=P(\omega_2)+\frac{1}{3}=\frac{3}{4}-P(\omega_4)$

άρα $P(A')\le\frac{3}{4}$

Β3.

- Αφού $P(A')=\frac{3}{4}$ τότε $P(\omega_4)=0$

- Από την (1) $\Rightarrow$ $P(\omega_2)=\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$
- $A - B = \{\omega_4\}$ και $B - A = \{\omega_3\}$ άρα $(A - B) \cup (B - A) = \{\omega_3,\omega_4\}$

  και $P[(A - B) \cup (B - A)] = P(\omega_3) + P(\omega_4) = \frac{1}{3}$

- $A'=\{\omega_2,\omega_3\}$, $B'=\{\omega_2,\omega_4\}$ άρα $A' - B' = \{\omega_3\}$ και $P(A' - B') = P(\omega_3)=\frac{1}{3}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω c το πλάτος κάθε κλάσης.

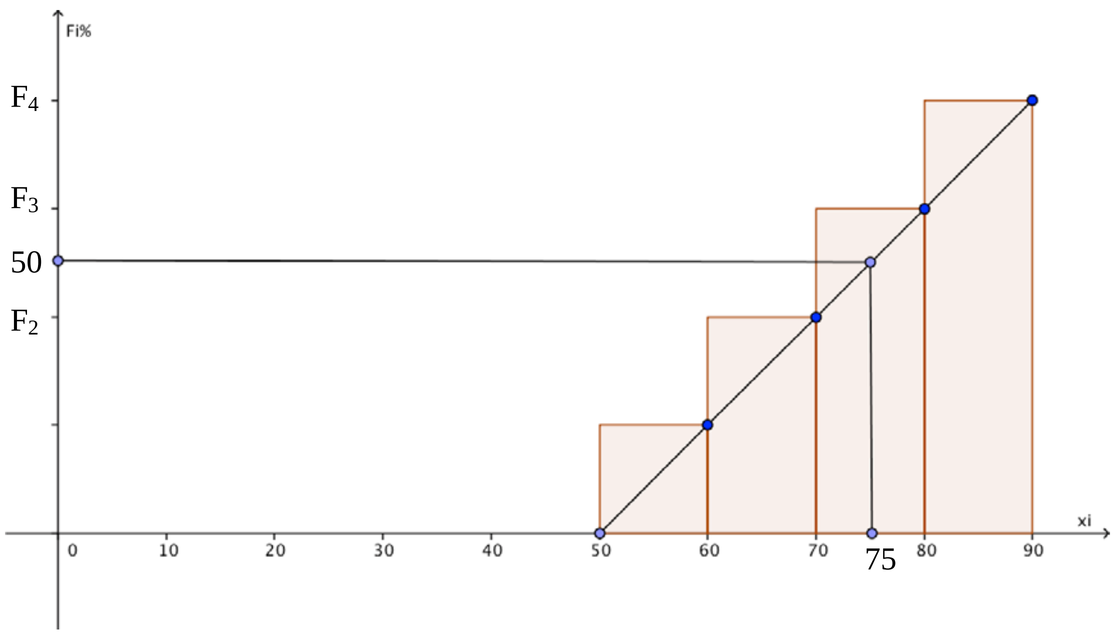
Κλάσεις	x_i	f_i
[50,50+c)		f_1
[50+c,50+2c)		f_2
[50+2c,50+3c)		f_3
[50+3c,50+4c)	85	f_4

$x_4=85 \Leftrightarrow \frac{50+3c+50+4c}{2}=85 \Leftrightarrow 100 + 7c = 170 \Leftrightarrow 7c = 70 \Leftrightarrow c = 10$

Γ2. Αφού c=10, οι κλάσεις είναι [50,60), [60,70), [70,80), [80,90) με αντίστοιχα κέντρα $x_1=55$, $x_2=65$, $x_3=75$, $x_4=85$.

$\bar{x} = 74 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} x_i f_i = 74 \Leftrightarrow 55f_1+65f_2+75f_3+85f_4=74 \overset{f_4=2f_3}{\Leftrightarrow} 55f_1+65f_2+75f_3+170f_3=74$

$\Leftrightarrow 55f_1+65f_2+245f_3=74 \quad (1)$



Από όμοια τρίγωνα στο παραπάνω σχήμα,

$$\frac{F_3\% - 50}{50 - F_2\%} = \frac{5}{5} \Leftrightarrow F_3\% - 50 = 50 - F_2\% \Leftrightarrow F_2\% + F_3\% = 100$$

άρα $F_2+F_3=1 \Leftrightarrow (f_1 + f_2)+ (f_1 + f_2 + f_3)= 1 \Leftrightarrow 2f_1 + 2f_2 + f_3 = 1$ (2)

Επίσης, $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \overset{f_4=2f_3}{\Leftrightarrow} f_1 + f_2 + 3f_3 = 1$ (3)

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2), (3) προκύπτει ότι $f_1=0,1$, $f_2=0,3$, $f_3=0,2$ και $f_4=2\cdot 0,2=0,4$

Γ3. $\bar{x}' = \dfrac{55\cdot v_1 + 65\cdot v_2 + 75\cdot v_3}{v_1 + v_2 + v_3}$ (I)

$f_2=3f_1$ άρα $v_3=3v_1$ και $f_3=2f_1$ άρα $v_3=2v_1$

Άρα (I)$\Leftrightarrow$ $\bar{x}' = \dfrac{55\cdot v_1 + 65\cdot 3v_1 + 75\cdot 2v_1}{v_1 + 3v_1 + 2v_1} = \dfrac{(55 + 65\cdot 3 + 75\cdot 2)v_1}{(1+2+3)v_1} = \dfrac{400}{6} = \dfrac{200}{3}$

Γ4. Μεγαλύτερες της τιμής $\bar{x}+2s$ είναι το

$\dfrac{100-95}{2}\%$ = 2,5% των παρατηρήσεων. Ομοίως

16% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες της

τιμής $\bar{x}-s$.

Άρα $\bar{x}+2s=74$ και $\bar{x}-s=68$.

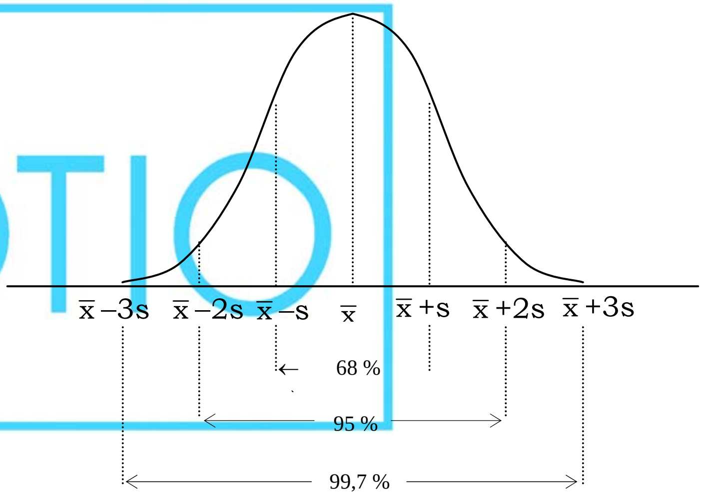
Αφαιρώντας τις σχέσεις κατά μέλη :

$3s=6 \Leftrightarrow s=2$

Άρα $\bar{x}=68+s=70$.

Ο συντελεστής μεταβολής είναι

$CV=\dfrac{s}{\bar{x}} = \dfrac{2}{70} < 0,1$ άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.



ΘΕΜΑ Δ

$f(x)=x\cdot \ln x+k$, $x>0$, $k>1$

Δ1. $f(1)=k$ άρα $M(1,k)$ το σημείο επαφής της γρ.παράστασης της f με την εφαπτομένη.

$f'(x) = \ln x + x\dfrac{1}{x} + 0 = \ln x + 1$ άρα $λ=f'(1)=1$ και ε: $y=λx+β \Leftrightarrow y=x+β$ (1)

$M(1,k)\in(ε)$ άρα $k=1+β$ (2)

Αφού $k>1$, έχουμε $β>0$. Από τη σχέση (1) έχουμε ότι η (ε) τέμνει τον x΄x (για y=0) στο σημείο

$A(-β,0)$ και τον y΄y (για x=0) στο σημείο $B(0,β)$. Άρα $E=\dfrac{β^2}{2} \overset{(2)}{=} \dfrac{(κ-1)^2}{2}$.

Είναι $E<2 \Leftrightarrow \dfrac{(κ-1)^2}{2}<2 \Leftrightarrow (κ-1)^2 < 4 \Leftrightarrow |κ-1| < 2 \overset{κ>1}{\Leftrightarrow} κ-1<2 \Leftrightarrow κ<3$

Όμως $κ>1$ και $κ\in Z$, οπότε η μοναδική δεκτή τιμή του κ είναι το 2. Άρα κ=2.

Δ2. ε: y=x+1, οπότε $y_i = x_i - 1 \Leftrightarrow x_i = y_i + 1$, i=1,2,…,50

α) Από εφαρμογή σχολ.βιβλίου $\overline{x} = \overline{y} - 1 = 31 - 1 = 30$

β) $$\overline{x}_{νέα} = \frac{x_1 + 3 + x_2 + 3 + \ldots + x_{20} + 3 + x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{35} + x_{36} - \lambda + \ldots + x_{50} - \lambda}{50} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 31 \cdot 50 = \sum_{i=1}^{50} x_i + 3 \cdot 20 + 15(-\lambda) \Leftrightarrow 31 \cdot 50 = 30 \cdot 50 + 60 - 15\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

Δ3. $f(x) = x \cdot \ln x + 2$, $f'(x) = \ln x + 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1}$

Στο $\left(\frac{1}{e}, e\right)$ η f είναι γνησίως αύξουσα άρα $f\left(\frac{1}{e}\right) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$ (3)

Επίσης, $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ και $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) + 2 = -\frac{1}{e} + 2$ άρα $f'\left(\frac{1}{e}\right) < f\left(\frac{1}{e}\right)$ (4)

Από (3),(4) προκύπτει ότι η μικρότερη παρατήρηση είναι το $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ και η μεγαλύτερη το f(e)=e+2, άρα R=e+2-0=e+2.

$$\overline{m} = \frac{0 + f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(e)}{5} = \frac{1}{5}(\alpha\ln\alpha + 2 + \beta\ln\beta + 2 + \gamma\ln\gamma + 2 + e + 2) = \frac{1}{5}(8 + \ln\alpha^{\alpha} + \ln\beta^{\beta} + \ln\gamma^{\gamma} + e) =$$

$$= \frac{1}{5}[\,8 + \ln(\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}\gamma^{\gamma}) + e\,] = \frac{1}{5}(8 + \ln e^{7} + e) = \frac{1}{5}(8 + 7 + e) = \frac{15 + e}{5}$$

Δ4. $f'(t) > 0 \Leftrightarrow \ln t + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln t > -1 \Leftrightarrow \ln t > \ln\frac{1}{e} \Leftrightarrow t > \frac{1}{e}$ άρα $A = \{t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{30}\}$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

$f(t) > f'(t) + 1 \Leftrightarrow t \cdot \ln t + 2 > \ln t + 1 + 1 \Leftrightarrow \ln t\,(t-1) > 0 \overset{t<1}{\Leftrightarrow} \ln t < 0 \Leftrightarrow t < 1$

άρα $B = \{t_1, t_1, \ldots, t_{29}\}$ και $A \cap B = \{t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{29}\}$

$$P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{19}{30}$$