ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ (23/05/2012)

ΘΕΜΑ Α

Α1. σχολ.σελ.31

Α2. σχολ.σελ.148

Α3. σχολ.σελ.96

Α4. α) Λ   β) Σ   γ) Λ   δ) Σ   ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. δ=25

Β2. $F_2\%=50 \Leftrightarrow f_1\% + f_2\% = 50$ & $f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% = 100 \Leftrightarrow f_3\% + f_4\% = 50$

Άρα $f_1 + f_2 = f_3 + f_4 \Leftrightarrow v_1 + v_2 = v_3 + v_4 \Leftrightarrow \alpha + 4 + 3\alpha - 6 = 2\alpha + 8 + \alpha - 2 \Leftrightarrow \alpha = 8$

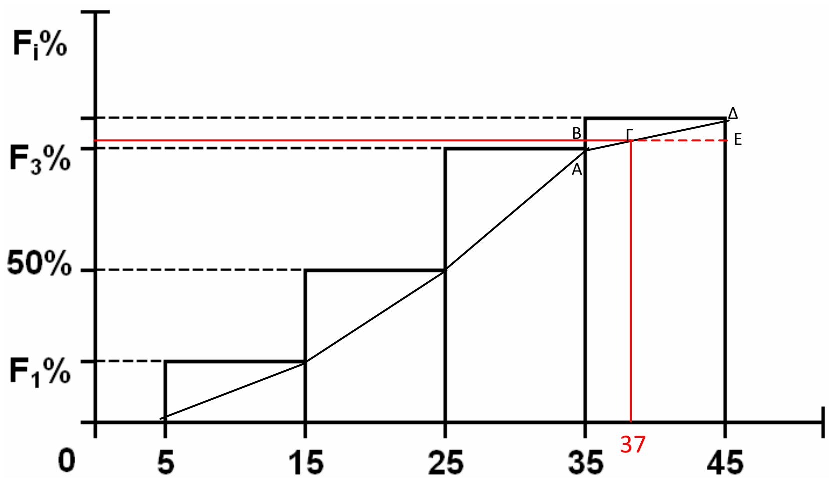
Χρόνοι (λεπτά)	x_i	v_i	f_i %	N_i	F_i %
[5, 15)	10	12	20	12	20
[15, 25)	20	18	30	30	50
[25, 35)	30	24	40	54	90
[35, 45)	40	6	10	60	100
Σύνολο		60	100		

$f_1 = \frac{12}{60} = 0{,}2$ άρα f_1=20% $f_3 = \frac{24}{60} = 0{,}4$ άρα f_3=40%

Β3. $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{v} x_i v_i}{v} = \frac{10\cdot 12 + 20\cdot 18 + 30\cdot 24 + 40\cdot 6}{60} = 24$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{v} (x_i - \bar{x})^2 v_i}{v} = \frac{14^2\cdot 12 + 4^2\cdot 18 + 6^2\cdot 24 + 16^2\cdot 6}{60} = \ldots = 84, \text{ άρα } s = \sqrt{84} \cong 9{,}17$$

Β4.



Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ είναι όμοια (ορθογώνια με $\hat{A}=\hat{\Delta}$ -*εντός εναλλάξ*), με ΒΓ=2, ΓΕ=10-2=8, ΔΕ=x και ΑΒ=10, οπότε έχουμε: $\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΕ}}=\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΔΕ}} \Leftrightarrow \frac{2}{8}=\frac{10-x}{x} \Leftrightarrow x=8$, άρα το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά για να λύσουν το πρόβλημα είναι 8%.

ΘΕΜΑ Γ

Έχουμε $P(\Gamma)=\frac{3\nu}{\nu^2+1}$, $P(I)=\frac{\nu+2}{\nu^2+1}$, $P(\Gamma\cap I)=\frac{\nu+1}{\nu^2+1}$ και

$$P(\Gamma\cup I)=\lim_{x\to -1}\frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+x}=\lim_{x\to -1}\frac{2(x^2+3-4)}{(x^2+x)(\sqrt{x^2+3}-2)}=\lim_{x\to -1}\frac{2(x-1)\cancel{(x+1)}}{x\cancel{(x+1)}(\sqrt{x^2+3}-2)}=\frac{2\cdot(-1-1)}{-1(\sqrt{1+3}+2)}=1$$

Γ1. Αφού $P(\Gamma\cup I)=1$, το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει τουλάχιστον μία από τις 2 ξένες γλώσσες είναι βέβαιο.

Γ2. $P(\Gamma\cup I)=P(\Gamma)+P(I)-P(\Gamma\cap I) \Leftrightarrow 1=\frac{3\nu}{\nu^2+1}+\frac{\nu+2}{\nu^2+1}-\frac{\nu+1}{\nu^2+1} \Leftrightarrow \nu^2+1=3\nu+1 \Leftrightarrow \nu^2-3\nu=0 \Leftrightarrow \nu(\nu-3)=0 \Leftrightarrow \nu=3$ (αφού $\nu\geq 3$)

Γ3. $P[(\Gamma-I)\cup(I-\Gamma)]=P(\Gamma-I)+P(I-\Gamma)$ (αφού Γ-Ι και Ι-Γ ασυμβίβαστα)

$=P(\Gamma)-P(\Gamma\cap I)+P(I)-P(\Gamma\cap I)$

$=P(\Gamma)+P(I)-2P(\Gamma\cap I)$

$=\frac{3\nu}{\nu^2+1}+\frac{\nu+2}{\nu^2+1}-2\frac{\nu+1}{\nu^2+1}=\frac{2\nu}{\nu^2+1}=\frac{6}{10}$ ή 60%

Γ4. Είναι $N(\Gamma\cap I)=32$ και $P(\Gamma\cap I)=\frac{\nu+1}{\nu^2+1}=\frac{4}{10}$

Οπότε $P(\Gamma\cap I)=\frac{N(\Gamma\cap I)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \frac{4}{10}=\frac{32}{N(\Omega)} \Leftrightarrow N(\Omega)=80$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{2\ln x\frac{1}{x}x-(1+\ln^2 x)}{x^2}=\frac{2\ln x-1-\ln^2 x}{x^2}=-\frac{(\ln x-1)^2}{x^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x-1=0 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x=e$

και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,e)\cup(e,+\infty)$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

x	0	e	+∞
f'(x)	–	0	-
f(x)	↘		↘

Δ2. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι Ε=(ΟΚ)(ΟΛ) άρα $E(x)=x\cdot f(x)=1+\ln^2 x$, $x>0$

Είναι $E'(x)=2\ln x\cdot\frac{1}{x}$

x	0	1	$+\infty$
$E'(x)$	$-$	0	$+$
$E(x)$	↘		↗

$E'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$E'(x) > 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Άρα το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο όταν x=1, οπότε Κ(1,0) και Λ(0,f(1)) δηλαδή Λ(0,1).
Συνεπώς, (ΟΚ)=(ΟΛ)=1, άρα το ΟΚΜΛ είναι τετράγωνο.

Δ3. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Σ(1,1) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=f'(1)=-1$

Το δείγμα $y_i = -x_i + \beta$ έχει μέση τιμή $\bar{y} = -\bar{x} + \beta = -10 + \beta$, τυπική απόκλιση $s_y = |-1| s_x = 2$

και $CV_y = \dfrac{s_y}{|\bar{y}|} = \dfrac{2}{|-10+\beta|}$

Για να είναι ομοιογενές, πρέπει $CV_y \leq 0{,}1 \Leftrightarrow \dfrac{2}{|-10+\beta|} \leq \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow |-10+\beta| \geq 10$

$\Leftrightarrow -10+\beta \geq 20$ ή $-10-\beta \leq -20 \Leftrightarrow \beta \geq -30$ ή $\beta \leq -10$ άρα $\beta \in (-\infty, -10] \cup [30, +\infty)$

Δ4. Είναι $A \subseteq A \cup B$ άρα $P(A) \leq P(A \cup B)$ και επειδή η f γνησίως φθίνουσα:

$$f(P(A)) \geq f(P(A \cup B)) \qquad (1)$$

Επίσης, $A \cap B \subseteq A \cup B$ άρα $P(A \cap B) \leq P(A \cup B)$ και επειδή η f γνησίως φθίνουσα:

$$f(P(A \cap B)) \geq f(P(A \cup B)) \quad (2)$$

Με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη:

$$f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \geq 2f(P(A \cup B))$$