**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (16/05/2011)

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** σχολικό βιβλίο σελ. 260

**Α2.** σχολικό βιβλίο σελ. 280

**Α3.** α) Σ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Σ

**ΘΕΜΑ Β**

**Β1.** Ισχύει ότι $|\bar{z}+3i| = |\overline{\bar{z}+3i}| = |z-3i|$

άρα η σχέση $|z-3i| + |\bar{z}+3i| = 2$ γράφεται:

$$|z-3i| + |z-3i| = 2$$

$$2|z-3i| = 2$$

δηλαδή $|z-3i| = 1$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι ο κύκλος με κέντρο Κ(0,3) και ρ=1.

**Β2.** Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε: $|z-3i| = 1 \Leftrightarrow |z-3i|^2 = 1$

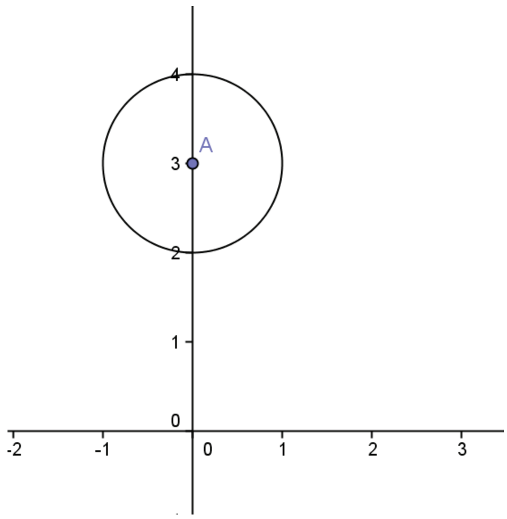
άρα $(z-3i)(\bar{z}+3i) = 1$ και επειδή $z \neq 3i$ προκύπτει:

$$\bar{z}+3i = \frac{1}{z-3i}$$

**Β3.** Παρατηρούμε ότι $\frac{1}{z-3i} = \bar{z}+3i$, από το προηγούμενο ερώτημα.

Άρα: $w = z-3i+\frac{1}{z-3i} = z-3i+\bar{z}+3i = z+\bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ οπότε $w \in R$.

Επιπλέον, εφόσον ο z ανήκει στον κύκλο με κέντρο Κ(0, 3) και ακτίνα 1, προκύπτει από το σχήμα ότι:




$$-1 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1$$

$$-2 \leq 2\mathrm{Re}(z) \leq 2$$

Όμως $2\mathrm{Re}(z)$=w, άρα

$$-2 \leq w \leq 2$$

**Β4.** $|z-w| = |z-2\mathrm{Re}(z)| = |z-(z+\bar{z})| = |-\bar{z}| = |z|$

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Για κάθε $x \in R$ έχουμε: $e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x)$

$$e^x f'(x)+e^x f''(x)-e^x=f'(x)+xf''(x)$$

$$\left(e^x f'(x)\right)'-\left(e^x\right)'=\left(xf'(x)\right)'$$

$$\left(e^x f'(x)-e^x-xf'(x)\right)'=0$$

Έστω g(x)= $e^x f'(x)-e^x-xf'(x)$, $x \in R$

Αφού $g'(x)=0$ και η g είναι παραγωγίσιμη και συνεχής (καθώς $f'(x)$ συνεχής και παραγωγίσιμη και $e^x$, x συνεχείς).

Άρα $g(x)=c \Leftrightarrow e^x f'(x)-e^x-xf'(x)=c$ $(c \in R)$

Για x=0: $e^0 f'(0)-e^0-0=c \Leftrightarrow c=-1$

άρα $e^x f'(x)-e^x-xf'(x)=-1 \Leftrightarrow f'(x)\left(e^x-x\right)=e^x-1$

Οπότε $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$, καθώς $e^x-x>0$

θεωρούμε $\varphi(x)=e^x-x$

$\varphi'(x)=e^x-1$, $\varphi'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow x=0$ & $\varphi'(x)>0 \Leftrightarrow e^x-1>0 \Leftrightarrow x>0$

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\varphi'(x)$ | − | 0 | + |
| $\varphi(x)$ | γν.φθίνουσα | ΕΛΑΧ. $\varphi(0)=1$ | γν.αύξουσα |

οπότε $\varphi(x)\geq\varphi(0) \Leftrightarrow \varphi(x)\geq 1$

Άρα $f'(x)=\left(\ell n(e^x-x)\right)'$, οπότε $f(x)=\ell n(e^x-x)+k$, $k \in R$

Για x=0: f(0)= $\ell n(e^0-0)+k \Leftrightarrow 0=\ell n1+k \Leftrightarrow k=0$

Άρα $f(x)=\ell n(e^x-x)$

**Γ2.** $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}=\dfrac{e^x-1}{\varphi(x)}$, όπου $\varphi(x)>0$, από προηγούμενο ερώτημα

Είναι $e^x-1=0 \Leftrightarrow x=0$, $e^x-1>0 \Leftrightarrow x>0$, άρα

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + |
| f(x) | γν.φθίνουσα | ΕΛΑΧ. f(0)=ln1=0 | γν.αύξουσα |

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο Α(0,0).

**Γ3.** $f''(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x-x}\right)'=\dfrac{e^x\left(e^x-x\right)-\left(e^x-1\right)^2}{\left(e^x-x\right)^2}=\dfrac{2e^x-xe^x-1}{\left(e^x-x\right)^2}$

Αφού ο παρονομαστής είναι θετικός, εξετάζουμε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης

$h(x) = 2e^x - xe^x - 1$.

$h'(x) = 2e^x - (e^x+xe^x) = e^x(1-x)$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(1-x)=0 \Leftrightarrow x=1$

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x(1-x)>0 \Leftrightarrow 1-x>0 \Leftrightarrow x<1$

| x | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | + | 0 | − |
| $h(x)$ | *γν. αύξουσα* | ΜΕΓ. $h(1)=e-1>0$ | *γν.φθίνουσα* |

Επίσης έχουμε: $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^x-xe^x-1\right)=0-0-1=-1$,

διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{-x}}\overset{\substack{d'H\\ \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x)'}{\left(e^{-x}\right)'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-e^x\right)=0$

Συνεπώς για $x\in(-\infty,1)$ έχουμε $h\left((-\infty,1)\right)=\left(-1,\ e-1\right)$. Έτσι η h έχει μία ρίζα α στο $(-\infty,1)$, η οποία είναι μοναδική λόγω της μονοτονίας της h. Οπότε $f''(\alpha)=0$.

Για $x<\alpha$: $h(x)<h(\alpha) \Leftrightarrow h(x)<0 \Leftrightarrow f''(x)<0$, δηλαδή f κοίλη στο $(-\infty,\alpha)$

Για $x>\alpha$: $h(x)>h(\alpha) \Leftrightarrow h(x)>0 \Leftrightarrow f''(x)>0$, δηλαδή f κυρτή στο $(\alpha,1)$

Άρα, στο η f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής στο $\alpha\in(-\infty,1)$

Επίσης: $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2e^x-xe^x-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((2-x)e^x-1\right)=-\infty$,

διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$

Συνεπώς για $x\in(1,+\infty)$ έχουμε $h\left((1,+\infty)\right)=\left(-\infty,\ e-1\right)$. Έτσι η h έχει μία ρίζα β στο $(1,+\infty)$, η οποία είναι μοναδική λόγω της μονοτονίας της h. Οπότε $f''(\beta)=0$.

Για $x<\beta$: $h(x)>h(\beta) \Leftrightarrow h(x)>0 \Leftrightarrow f''(x)>0$, δηλαδή f κυρτή στο $(1,\beta)$

Για $x>\beta$: $h(x)<h(\beta) \Leftrightarrow h(x)<0 \Leftrightarrow f''(x)<0$, δηλαδή f κοίλη στο $(\beta,+\infty)$

Άρα, στο η f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής στο $\beta\in(1,+\infty)$

Συνολικά, η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

**Γ4.** Έστω $\sigma(x)=\ell n\left(e^x-x\right)-\sigma\upsilon\nu x=f(x)-\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση σ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$\sigma'(x)=f'(x)+\eta\mu x > 0$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, οπότε η σ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και έτσι έχει το πολύ μία ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Η σ είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

$\sigma(0) = f(0)-\sigma\upsilon\nu 0 = 0-1 = -1 < 0$ & $\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$, από Γ2

Έτσι $\sigma(0)\cdot\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η συνάρτηση σ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Η ρίζα αυτή θα είναι μοναδική καθώς η συνάρτηση σ είναι γνησίως μονότονη.

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** Για τα δύο ολοκληρώματα στις δοθείσες σχέσεις, θέτουμε x+t=u άρα dt=du. Για t=0 είναι u=x και για t=-x είναι u=0.

Έτσι από τη σχέση (i) της εκφώνησης προκύπτει:

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=\int_x^0 \frac{e^{2u-2x}}{g(u)}du$$

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=e^{-2x}\int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)}du$$

$$1-f(x)=-\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}du$$

$$f(x)=1+\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}du \quad (1)$$

Η συνάρτηση $e^{2u}$ είναι συνεχής ως σύνθεση πολυωνυμικής με εκθετική και η g(u) συνεχής (δίνεται στην εκφώνηση). Επομένως η συνάρτηση $\varphi(u)=\frac{e^{2u}}{g(u)}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών. Έτσι, η συνάρτηση $\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}du$ είναι παραγωγίσιμη και άρα η συνάρτηση f(x),από τη σχέση (1) είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων.

Επομένως,

$$f'(x)=\frac{e^{2x}}{g(x)} \Leftrightarrow f'(x)g(x)=e^{2x} \quad (3)$$

Επιπλέον, από τη σχέση (ii) της εκφώνησης προκύπτει:

$$\frac{1-g(x)}{e^{2x}}=\int_x^0 \frac{e^{2u-2x}}{f(u)}du$$

$$\frac{1-g(x)}{e^{2x}}=e^{-2x}\int_x^0 \frac{e^{2u}}{f(u)}du$$

$$1-g(x)=-\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)}du$$

$$g(x)=1+\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)}du \quad (2)$$

Η συνάρτηση $e^{2u}$ είναι συνεχής ως σύνθεση πολυωνυμικής με εκθετική και η f(u) συνεχής (δίνεται στην εκφώνηση). Επομένως η συνάρτηση $h(u)=\frac{e^{2u}}{f(u)}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών. Έτσι, η συνάρτηση $\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)}du$ είναι παραγωγίσιμη και άρα η συνάρτηση g(x),από τη σχέση (2) είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων.
Επομένως,

$$g'(x)=\frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow g'(x)f(x)=e^{2x} \quad (4)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει:

$f'(x)g(x) - g'(x)f(x) = 0$ ή $\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}=0$ , αφού g(x)>0

δηλαδή $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0$.

Η συνάρτηση $\frac{f(x)}{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων, άρα:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=c\ ,\ c\in R \Leftrightarrow f(x)=c\cdot g(x)$$

Όμως, από τις σχέσεις (i) και (ii) της εκφώνησης για x=0 προκύπτει ότι:

$$f(0)=g(0)=1$$

Επομένως, αν στη σχέση $f(x)=c\cdot g(x)$ θέσουμε x=0, προκύπτει c=1 και έτσι:

$$f(x)=g(x),\ x\in R$$

*<u>Β' τρόπος:</u>*
Από τις σχέσεις (3), (4) έχουμε:

$f'(x)g(x)=g'(x)f(x)$ οπότε $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{g'(x)}{g(x)}$, αφού f(x)>0 και g(x)>0

Επομένως, $(\ln(f(x)))'=(\ln(g(x)))'$ δηλαδή $\ln(f(x))=\ln(g(x))+\mu$, $\mu\in R$

Για x=0: $\ln1=\ln1+\mu \Leftrightarrow \mu=0$

Έτσι: $\ln(f(x))=\ln(g(x)) \Leftrightarrow f(x)=g(x),\ x\in R$

**Δ2.** Από τη σχέση (3), αφού f(x)=g(x), έχουμε:

$$f'(x)f(x)=e^{2x} \Leftrightarrow \left(\frac{f^2(x)}{2}\right)'=\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'$$

Άρα, $\frac{f^2(x)}{2}=\frac{e^{2x}}{2}+\kappa,\quad \kappa\in R$

Για x=0: $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\kappa \Leftrightarrow \kappa=0$

Επομένως, $f^2(x)=e^{2x}$ από όπου προκύπτει ότι $f(x)=e^x$, αφού $f(x)>0$.

**Δ3.**

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^-}\left(x\cdot e^{-1/x}\right)=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\overset{(*)}{=}\lim_{x\to0^-}\frac{\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^-}\left(-e^{-\frac{1}{x}}\right)\overset{(*)}{=}$$

$$=-\infty$$

(*) $\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$

$\lim_{x\to0^-}e^{-\frac{1}{x}}=\lim_{u\to+\infty}e^u=+\infty$, διότι θέτοντας $u=-\frac{1}{x}$ έχουμε $\lim_{x\to0^-}u=\lim_{x\to0^-}\left(-\frac{1}{x}\right)=+\infty$

Οπότε έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{-\infty}{+\infty}$ και εφαρμόζουμε κανόνα de l’ Hospital.

**Δ4.** Η συνάρτηση $f(t^2)=e^{t^2}$ είναι συνεχής ως σύνθεση πολυωνυμικής με εκθετική άρα η $F(x)=\int_1^x f(t^2)dt$ είναι παραγωγίσιμη με $F'(x)=f(x^2)=e^{x^2}$.

Όμως $F'(x)>0$, οπότε η F είναι γνησίως αύξουσα.

Επίσης, το ζητούμενο εμβαδό είναι $E(\Omega)=\int_0^1|F(x)|dx$

Για $x\in[0,1]$ έχουμε $F(0)\le F(x)\le F(1)$

Όμως $F(1)=\int_1^1 f(t^2)dt=0$, άρα $F(x)\le 0$

Έτσι, έχουμε

$$E(\Omega)=-\int_0^1 F(x)dx=-\int_0^1(x)'F(x)dx=-\left[x\cdot F(x)\right]_0^1+\int_0^1 xF'(x)dx=-(F(1)-0)+\int_0^1 x\cdot e^{x^2}dx=$$

$$=0+\left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1=\frac{e}{2}-\frac{1}{2}\ \text{τ.μ.}$$