ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ (14/05/2011)

ΘΕΜΑ Α

Α1. σχολικό βιβλίο σελ. 152

Α2. σχολικό βιβλίο σελ. 142

Α3. σχολικό βιβλίο σελ. 65

Α4. α) Λ, β) Λ, γ)Σ, δ) Λ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Ισχύει: $P(M)+P(A)+P(K)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}+4\lambda^2 - 5\lambda + \frac{7}{4}=1 \Leftrightarrow 4\lambda^2-5\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ ή $\lambda=\frac{1}{4}$

Το λ=1 απορρίπτεται γιατί τότε θα ήταν $P(A)=4$ (Αδύνατο), άρα $\lambda=\frac{1}{4}$.

Για $\lambda=\frac{1}{4}$ έχουμε $P(M)=\frac{1}{4}$, $P(A)=\frac{1}{4}$ και $P(K)=\frac{1}{2}$

Β1. $P(M)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{N(M)}{N(\Omega)}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow N(M)=\frac{1}{4}N(\Omega)$ (1)

$P(A)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow N(A)=\frac{1}{4}N(\Omega)$ (2)

$P(K)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{N(K)}{N(\Omega)}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow N(K)=\frac{1}{2}N(\Omega)$ (3)

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) προκύπτει ότι ο αριθμός $N(\Omega)$ πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 4.

Από την εκφώνηση έχουμε ότι $64<N(\Omega)<72$, δηλαδή:

$$N(\Omega) = 65 \text{ ή } 66 \text{ ή } 67 \text{ ή } 68 \text{ ή } 69 \text{ ή } 70 \text{ ή } 71$$

Από τους παραπάνω αριθμούς, ο μοναδικός που είναι πολλαπλάσιο του 4 είναι το 68, επομένως $N(\Omega)=68$.

Β' τρόπος:

$P(M)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{N(M)}{N(\Omega)}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow N(\Omega)=4N(M)$

Εφόσον είναι $64<N(\Omega)<72$, από την παραπάνω σχέση έχουμε:

$$64<4N(M)<72 \Leftrightarrow 16<N(M)<18$$

Άρα $N(M)=17$ αφού $N(M)\in \mathbb{N}^*$, επομένως $N(\Omega)=4\cdot 17 = 68$.

Β3. Για $\lambda=\frac{1}{4}$ έχουμε $P(M)=\frac{1}{4}$, $P(A)=\frac{1}{4}$ και $P(K)=\frac{1}{2}$

$$P(M)=\frac{N(M)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow N(M)=P(M)\cdot P(\Omega)=\frac{1}{4}\cdot 68=17$$

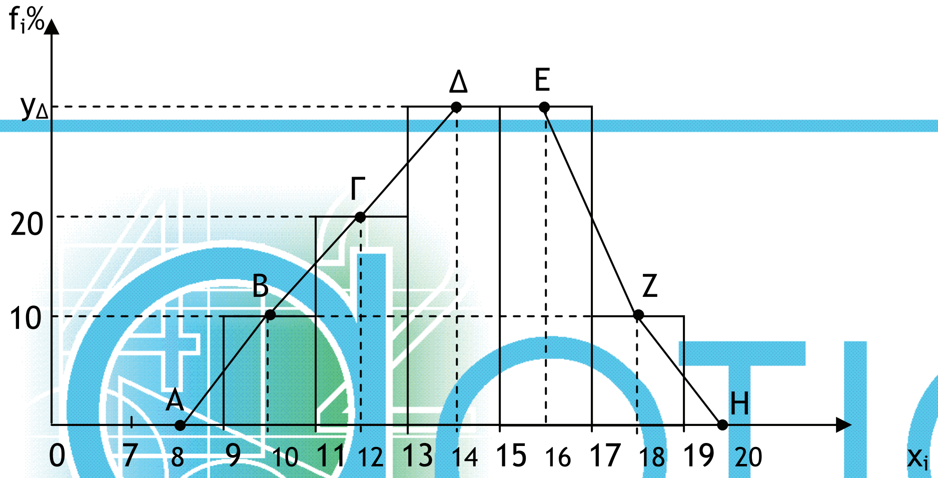
$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow N(A)=P(A)\cdot P(\Omega)= =\frac{1}{4}\cdot 68=17$$

$$P(K)=\frac{N(K)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow N(K)=P(K)\cdot P(\Omega)= =\frac{1}{2}\cdot 68=34$$

Άρα το κουτί περιέχει 17 μαύρες, 17 άσπρες και 34 κόκκινες μπάλες.

B4. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου $A \cup M$, και επειδή αυτά είναι ασυμβίβαστα, έχουμε: $P(A \cup M) = P(A) + P(M) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

ΘΕΜΑ Γ



Γ1. Δίνεται από την εκφώνηση ότι $\bar{x}=14,2$ (1) και $y_\Delta=y_E$ (2).

Από τη σχέση (1) λοιπόν προκύπτει:

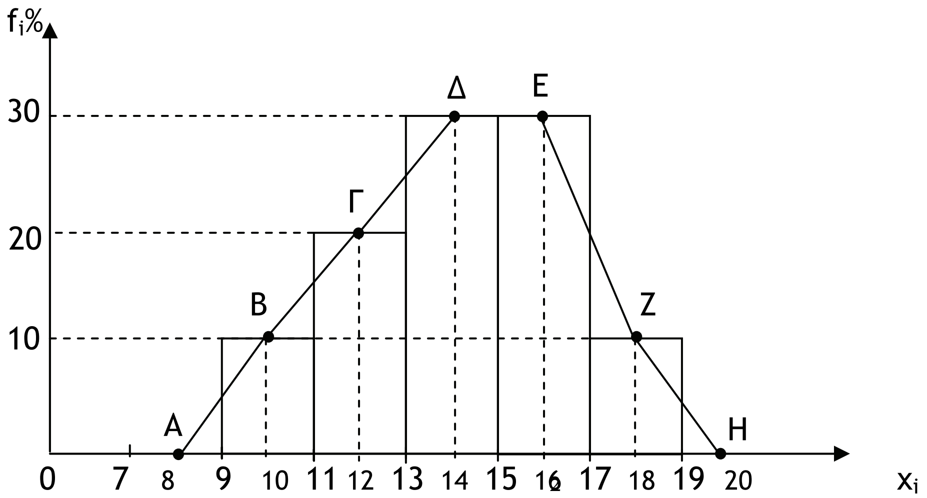
$$\sum_{i=1}^{5} x_i f_i = 14,2 \Leftrightarrow 10\cdot 0,1 + 12\cdot 0,2 + 14\cdot \frac{y_\Delta}{100} + 15\cdot \frac{y_E}{100} + 18\cdot 0,1 = 14,2 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 0,3\, y_\Delta = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_\Delta = 30$$

Άρα από τη σχέση (2): $y_E = 30$

Παρατήρηση: Μπορούσε ο μαθητής να εργαστεί αγνοώντας τη μέση τιμή $\bar{x}$, *χρησιμοποιώντας ότι το άθροισμα των f_i% είναι 100.*

Γ2.



Γ3.

κλάσεις	x_i	f_i	$f_i\%$
[9,11)	10	0,1	10
[11,13)	12	0,2	20
[13,15)	14	0,3	30
[15,17)	16	0,3	30
[17,19)	18	0,1	10
Σύνολο	-	1	100

Γ4. Το ποσοστό των πωλητών που θα λάβουν το επιπλέον ποσό είναι:

$$f_4\% + f_5\% = 30\% + 10\% = 40\%$$

Γ5. Το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο την κατανομής συχνοτήτων ισούται με το μέγεθος του δείγματος, άρα ν=80.

Επομένως, ο αριθμός των πωλητών που θα πάρουν το επιπλέον ποσό είναι:

$$\frac{40}{100}\cdot 80 = 32 \text{ πωλητές}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} = e^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x}, \quad x \in R$

$$f'(x) = \left(e^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x}\right)' = e^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x\right)' = e^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x}\left(x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}x\right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x}\left(x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}x\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ή } x = \frac{2}{5}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x}\left(x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}x\right) > 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3} \text{ ή } x > \frac{2}{5}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	
			Τ.Μ.		Τ.Ε.		

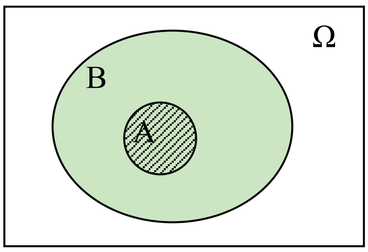
Δ2. $A \subseteq B$ άρα $P(A) \le P(B)$, οπότε $P(A)=\frac{1}{3}$ & $P(B)=\frac{2}{5}$

$A\cap B=A$ άρα $P(A\cap B)=P(A)=\frac{1}{3}$

$A-B=\varnothing$ άρα $P(A-B)=0$

$A\cup B=B$ άρα $P(A\cup B)=P(B)=\frac{2}{5}$

$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$



Δ3. α) $f(x)=h(x) \Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}=e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3}{2}x^2-x-\frac{1}{3}\right)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{5}x\left(\frac{3}{2}x^2-x-\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x=0 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{3}\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{3}{2}x^2-x-\frac{1}{3}\right)$$

$\Leftrightarrow$ $x=0$ ή $x=2$ ή $x=3$

β) $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=3$, $\nu_1=2x_1+1=1$, $\nu_2=2x_2+1=5$, $\nu_3=2x_3+1=7$

$$\bar{x}=\frac{x_1\nu_1+x_2\nu_2+x_3\nu_3}{\nu_1+\nu_2+\nu_3}=\frac{0\cdot 1+2\cdot 5+3\cdot 7}{1+5+7}=\frac{31}{13}$$