ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ - 19/05/2010

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχ. βιβλίο, σελ. 304

Α2. Σχ. βιβλίο σελ.279

Α3. Σχ. βιβλίο σελ.273

Α4. α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $z+\frac{2}{z}=2 \Leftrightarrow z^2+2=2z \Leftrightarrow z^2-2z+2=0$

$\Delta = 4 - 8 = -4$ άρα $z_{1,2}=\frac{2\pm i\sqrt{4}}{2}=\frac{2\pm 2i}{2}=1\pm i$

Β2. $z_1^{2010}+z_2^{2010}=[(1+i)^2]^{1005}+[(1-i)^2]^{1005}=(1+2i-1)^{1005}+(1-2i-1)^{1005}=$

$=(2i)^{1005}+(-2i)^{1005}=(2i)^{1005}-(2i)^{1005}=0$

Β3. $|w-4+3i|=|z_1-z_2| \Leftrightarrow |w-(4-3i)|=|1+i-(1-i)| \Leftrightarrow |w-(4-3i)|=|2i| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |w-(4-3i)|=2$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w είναι ο κύκλος με κέντρο Κ(4, -3) και ακτίνα ρ=2.

Β4. Είναι $|w|_{min}$ = (ΟΑ) = (ΟΚ) - ρ

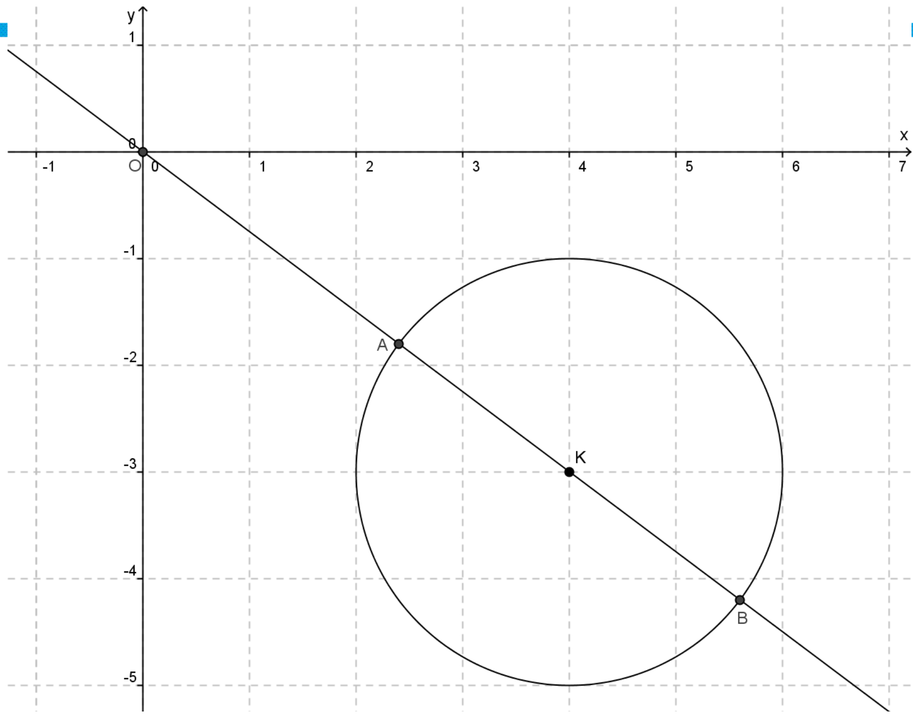
και $|w|_{max}$ = (ΟΒ) = (ΟΚ) + ρ

Όμως (ΟΚ) = $\sqrt{(4-0)^2+(-3-0)^2}=5$

Άρα $|w|_{min}$ = 5 - 2 = 3

και $|w|_{max}$ = 5 + 2 = 7

οπότε: $3\le |w| \le 7$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $D_f=R$ και η f είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων (2x συνεχής ως πολυωνυμική και $\ln(x^2+1)$ συνεχής ως σύνθεση πολυωνυμικής με λογαριθμική-που είναι συνεχείς)

$$f'(x)=\left(2x+\ln(x^2+1)\right)'=2+\frac{2x}{x^2+1}=\frac{2x^2+2+2x}{x^2+1}=2\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$$

Όμως $x^2+1>0$ για κάθε $x\in R$ και $x^2+x+1>0$ για κάθε $x\in R$ (αφού Δ=1-4 = -3<0)

Άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Γ2. $$2(x^2-3x+2)=\ln\left(\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-2(3x-2)=\ln\left((3x-2)^2+1\right)-\ln\left(x^4+1\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+\ln(x^4+1)=2(3x-2)+\ln\left((3x-2)^2+1\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x^2)=f(3x-2)\overset{(*)}{\Leftrightarrow}$$ (*) αφού f γνησίως αύξουσα άρα και 1 - 1

$$\Leftrightarrow x^2=3x-2\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2$$

Γ3. $$f''(x)=2\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)'=2\frac{(2x+1)(x^2+1)-(x^2+x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow 1-x^2=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$$

$$f''(x)>0\Leftrightarrow 1-x^2>0\Leftrightarrow x^2<1\Leftrightarrow |x|<1\Leftrightarrow -1<x<1$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f''(x)$	−	0	+	0	−
f(x)	∩		∪		∩
		σ.κ.		σ.κ.	

f(1) = 2 + ln2
f(-1) = -2 + ln2
Άρα η f έχει δύο σημεία καμπής A(1, 2 + ln2), B(-1, -2 + ln2)

Στο σημείο A είναι $f'(1)=3$ άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο A είναι:
ε_1: $y-(2+\ln 2)=3\cdot(x-1) \Leftrightarrow y=3x+\ln 2-1$
για x = 0 είναι y = ln2 - 1 δηλαδή τέμνει τον άξονα y΄y στο (0, ln2 - 1)

Στο σημείο B είναι $f'(-1)=1$ άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο B είναι:
ε_2: $y-(-2+\ln 2)=1\cdot(x+1) \Leftrightarrow y=x+\ln 2-1$
για x = 0 είναι y = ln2 - 1 δηλαδή τέμνει τον άξονα y΄y στο (0, ln2 - 1)

Άρα οι ε_1, ε_2 τέμνονται πάνω στον y΄y στο σημείο Γ(0, ln2 - 1).

Γ4. $$I=\int_{-1}^{1}xf(x)dx=\int_{-1}^{1}\left[2x^2+x\ln\left(x^2+1\right)\right]dx=\int_{-1}^{1}2x^2dx+\int_{-1}^{1}\left[x\ln\left(x^2+1\right)\right]dx=\left[2\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}+K \qquad (A)$$

όπου K= $\int_{-1}^{1}\left[x\ln\left(x^2+1\right)\right]dx$

Θέτουμε u=x^2+1, οπότε du=2xdx

Για x=1: u=2

Για x=−1: u=2

Άρα K=0 και από τη σχέση (A) έχουμε: I= $\left[2\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}+0=\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x)-x=3+\int_0^x\frac{t}{f(t)-t}dt \Leftrightarrow f(x)=3+\int_0^x\frac{t}{f(t)-t}dt+x$ (1)

Αφού η f είναι συνεχής και t συνεχής ως πολυωνυμική, έχουμε $\frac{t}{f(t)-t}$ συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Συνεπώς η $\int_0^x\frac{t}{f(t)-t}dt$ είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με $\left(\int_0^x\frac{t}{f(t)-t}dt\right)'=\frac{x}{f(x)-x}$. Επίσης 3+x συνεχής ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη με (3+x)΄=1, οπότε η $f(x)=\int_0^x\frac{t}{f(t)-t}dt+x+3$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $f'(x)=\frac{x}{f(x)-x}+1=\frac{f(x)}{f(x)-x}$ (2)

Δ2. Βάση των παραπάνω έχουμε ότι η g είναι παραγωγίσιμη και συνεχής.

$g'(x)=2f(x)f'(x)-2f(x)-2xf'(x)=2(f(x)-x)f'(x)-2f(x)\overset{(2)}{=}2(f(x)-x)\frac{f(x)}{f(x)-x}-2f(x)=2f(x)-2f(x)=0$

Άρα η g είναι σταθερή, δηλαδή για κάθε $x\in R$ είναι g(x)=c (3)

Δ3. Από την (1) για x=0 έχουμε: f(0)=3

Από την (3) για x=0 έχουμε: $g(0)=c \Leftrightarrow (f(0))^2-2\cdot 0\cdot f(0)=c \Leftrightarrow c=9$

Άρα από τη σχέση (3) : $g(x)=9 \Leftrightarrow (f(x))^2-2xf(x)=9 \Leftrightarrow (f(x))^2-2xf(x)+x^2=9+x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (f(x)-x)^2=9+x^2 \Leftrightarrow |f(x)-x|=\sqrt{9+x^2}$ (4)

- $f(x)-x=\sqrt{9+x^2} \Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{9+x^2}$
- $f(x)-x=-\sqrt{9+x^2}$, απορρίπτεται (διότι για x=0 προκύπτει f(0)=−3)

ή φ(x)=f(x)−x ≠ 0 (από εκφώνηση) και συνεχής, οπότε η φ διατηρεί πρόσημο

είναι φ(0)=f(0)=3>0, συνεπώς φ(x)>0 ⇔ f(x)−x>0 για κάθε $x\in R$

(4) ⇔ $f(x)-x=\sqrt{9+x^2} \Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{9+x^2}$

Δ4. $\int_x^{x+1}f(t)dt<\int_{x+1}^{x+2}f(t)dt \Leftrightarrow \int_a^{x+1}f(t)dt-\int_a^{x}f(t)dt<\int_a^{x+2}f(t)dt-\int_a^{x+1}f(t)dt$, $a\in R$ (5)

Θεωρώ συνάρτηση h(x)= $\int_a^x f(t)dt$, $a,x\in R$

Η h είναι παραγωγίσιμη (διότι f συνεχής) με h΄(x)=f(x) και συνεχής στο R. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ.Δ.Λ. για την h στα διαστήματα (x,x+1) και (x+1, x+2) έχουμε:

➢ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(x,x+1)$ τέτοιο ώστε:

$$h'(\xi_1)=\frac{h(x+1)-h(x)}{x+1-x}=\int_a^{x+1}f(t)dt-\int_a^{x}f(t)dt \qquad (6)$$

- υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x+1,x+2)$ τέτοιο ώστε:

$$h'(\xi_2)=\frac{h(x+2)-h(x+1)}{x+2-x-1}=\int_a^{x+2}f(t)dt-\int_a^{x+1}f(t)dt \qquad (7)$$

Όμως $h'(x)=f(x)=x+\sqrt{9+x^2}$ και $h''(x)=f'(x)\overset{(2)}{=}\dfrac{f(x)}{f(x)-x}=\dfrac{x+\sqrt{9+x^2}}{\sqrt{9+x^2}}>0$, διότι:

- $\sqrt{9+x^2}>0$ για κάθε $x\in R$
- $x+\sqrt{9+x^2}>0$, διότι $x+\sqrt{9+x^2}>0 \Leftrightarrow \sqrt{9+x^2}>-x$ (8)

  Για $x>0$ είναι $-x<0$, οπότε η (8) ισχύει για κάθε $x>0$

  Για $x\le 0$ είναι $-x\ge 0$, οπότε η (8) υψώνοντας στο τετράγωνο γίνεται:

  $(8)\Leftrightarrow 9+x^2>(-x)^2 \Leftrightarrow 9>0$, που ισχύει για κάθε $x\le 0$

  Άρα η (8) ισχύει για κάθε $x\in R$.

Συνεπώς η h' είναι γνησίως αύξουσα στο R. Έτσι έχουμε:

$$\xi_1<\xi_2 \Rightarrow h'(\xi_1)<h'(\xi_2) \overset{(6),(7)}{\Rightarrow} \int_a^{x+1}f(t)dt-\int_a^{x}f(t)dt < \int_a^{x+2}f(t)dt-\int_a^{x+1}f(t)dt$$

Άρα η (5) ισχύει, οπότε ισοδύναμα ισχύει και η αρχική.