Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής – 17/5/2010

ΘΕΜΑ Α

Α1. σελ.93

Α2. σελ.87

Α3. σελ.140

Α4. α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\sqrt{x^2-x+1}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2(x^2-x+1-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{\sqrt{x^2-x+1}+1}=1$$

Β2. $f'(x)=2\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-x+1}}(2x-1)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$ άρα $\lambda=f'(0)=-1$

Β3. εφω=−1 άρα ω=135°

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αν c το πλάτος κάθε κλάσης τότε η 1η θα είναι [0,c), η 2η [c,2c) κλπ. Αφού η κεντρική τιμή της 2ης κλάσης είναι 6 έχουμε: $\dfrac{c+2c}{2}=6\Leftrightarrow c=4$

Γ2.

κιλά	x_i	ν_i	$x_i\nu_i$
[0-4)	2	20	40
[4-8)	6	40	240
[8-12)	10	45	450
[12-16)	14	30	420
[16-20)	18	25	450
Σύνολο		160	1600

$$\bar{x}=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{k}x_i\nu_i=\frac{1600}{160}=10$$

$$s^2=\frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{k}x_i^2\nu_i-\frac{\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\nu_i\right)^2}{\nu}\right]=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{k}x_i^2\nu_i-\frac{\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\nu_i\right)^2}{\nu^2}=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{k}x_i^2\nu_i-\bar{x}^2$$

Άρα $s^2=\dfrac{1}{160}(4\cdot 20+36\cdot 40+100\cdot 45+196\cdot 30+324\cdot 25)-10^2=\dfrac{1}{160}20000-100=25$, οπότε s=5

Γ3. $CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{5}{10}=0{,}5$ ή 50%

Αφού ο συντελεστής μεταβολής είναι μεγαλύτερος του 10%, το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ4. $N(A)=10+45+15=70$ άρα $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{70}{160}=\frac{7}{16}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x)=\frac{1}{x-P(A)}-\frac{1}{2}2(x-P(A))=\frac{1}{x-P(A)}-(x-P(A))=\frac{1-(x-P(A))^2}{x-P(A)}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-(x-P(A))^2=0 \Leftrightarrow (x-P(A))^2=1 \Leftrightarrow x-P(A)=1$ ή $x-P(A)=-1$

$x=1+P(A)$ $\quad$ $x=P(A)-1$

απορ.αφού $x>P(A)$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-(x-P(A))^2>0 \Leftrightarrow (x-P(A))^2<1 \Leftrightarrow |x-P(A)|<1 \Leftrightarrow x-P(A)<1 \Leftrightarrow x<P(A)+1$

x	P(A)	P(A)+1	+∞
f′(x)	+	0	−
f(x)	↗	ΜΕΓ.	↘

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(P(A),P(A)+1)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(P(A)+1,+\infty)$.

Έχει ολικό μέγιστο στο $x_o=P(A)+1$ το $f(x_o)=f(P(A)+1)=\ln 1-\frac{1}{2}1^2+P(B)=P(B)-\frac{1}{2}$.

Δ2. $x_o=\frac{5}{3} \Leftrightarrow P(A)+1=\frac{5}{3} \Leftrightarrow P(A)=\frac{2}{3}$

$f(x_o)=0 \Leftrightarrow P(B)-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow P(B)=\frac{1}{2}$

Δ3. Ζητάμε την πιθανότητα: $P\left[(A\cap B)'\right]$

Όμως $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}=\frac{1}{3}$

Άρα $P\left[(A\cap B)'\right]=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

Δ4. $P[(A-B)\cup(B-A)]=P(A-B)+P(B-A)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$